

**МИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА**

**А. С. СЫСОЕВ**

# **ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

**Монография**

**Харьков  
ХНУГХ им. А. Н. Бекетова  
2015**

УДК 535.42  
ББК 22.336  
С95

***Автор***

**Сысоев Анатолий Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент

***Рецензенты:***

**Колчигин Н. Н.**, доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина;

**Говоров Ф. П.**, доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А. Н. Бекетова

*Рекомендовано к печати Ученым советом ХНУГХ им. А. Н. Бекетова  
протокол №10 от 30.05.14 г.*

**Сысоев А. С.**

С95 Волновые пучки в квазиоптических системах: монография / А. С. Сысоев ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2015. – 129 с.  
ISBN 978-966-695-378-3

В монографии рассмотрены задачи преломления гауссовых волновых пучков на границе раздела различных сред, дифракция гауссовых волновых пучков на решетках (в том числе голографических), квазиоптические резонаторы с диэлектрическими слоями и электронными потоками. В качестве сред рассматриваются изотропные диэлектрики, квадратично неоднородные диэлектрики, одноосные кристаллы и нелинейные среды. При этом используется идея описания параметров пучка с помощью комплексного параметра, который определяет его основные параметры. Определив операторы преобразования на различных препятствиях, предложен операторный метод прохождения пучков в сложных квазиоптических системах. Полученные результаты предназначены для использования при проектировании и расчетах квазиоптических приборов и систем различного назначения.

**УДК 535.42  
ББК 22.336**

ISBN 978-966-695-378-3

© А. С. Сысоев, 2015

© ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2015

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ.</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ СРЕД.</b> . . . . .	5
1.1 Отражение и преломление волнового пучка на границе раздела различных сред. . . . .	5
1.2 Прохождение гауссовых волновых пучков через слоистый изотропный диэлектрик с плоскими границами раздела. . . . .	13
1.3 Оптика гауссовых пучков в изотропных диэлектриках. . . . .	23
1.4 Прохождение гауссова пучка через квадратично-неоднородную призму	33
1.5 Преломление гауссового волнового пучка плоской границей одноосного кристалла. . . . .	40
1.6 Распространение гауссового волнового пучка в слоистой нелинейной среде с плоскими границами раздела. . . . .	46
<b>ГЛАВА 2. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ НА РЕШЕТКАХ.</b> . . . . .	50
2.1 Поляризация волновых пучков и сведение векторных задач дифракции волновых пучков на решетках к скалярным. . . . .	50
2.2 Дифракция волнового пучка, наклонно падающего на плоскую решетку. . . . .	54
2.3 Дифракция гауссового волнового пучка на плоской решетке, расположенной между двумя слоями диэлектрика. . . . .	61
2.4 Структура поля затухающих гармоник при дифракции волновых пучков на одномерно периодических решетках. . . . .	70
2.5 Дифракционное излучение электронного потока с переменной амплитудой плотности тока. . . . .	76
2.6 Голографирование в поле гауссовых волновых пучков. . . . .	82
2.7 Дифракция гауссового пучка на тонкой голографической решетке. . . . .	89
<b>ГЛАВА 3. КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ И РЕШЕТКАМИ</b> . . . . .	93
3.1 Квазиоптический открытый резонатор с диэлектрическим слоем и решетками. . . . .	93
3.2 Квазиоптический открытый резонатор с анизотропной пластиной. . . . .	100
3.3 Открытый резонатор со слоем квадратично неоднородного диэлектрика. . . . .	106
3.4 Прохождения волнового пучка сквозь линзу. . . . .	114
3.5 Прохождение гауссового волнового пучка через линзовую линию. . . . .	118
3.6 Потери на преобразование в генераторах дифракционного излучения. . . . .	123
<b>СПИСОК ИСТОЧНИКОВ.</b> . . . . .	128

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие лазерной техники привело к созданию приборов нового класса – оптоэлектронных лазерных приборов, что поставило разработчиков перед необходимостью расчета оптических и квазиоптических систем, трансформирующих излучение в виде гауссовых волновых пучков. Из-за специфических особенностей излучения в виде гауссовых волновых пучков законы его распространения и взаимодействия с оптическими средами и преобразователями отличаются от законов, справедливых для излучения в виде обычных волн. Эффективность практического применения излучения в виде пучков во многом зависит от того, насколько правильно учтены свойства пучков при расчете оптических и квазиоптических систем.

Законы формирования волновых пучков были впервые описаны на языке волновой оптики, где понятийный и математический аппараты не соответствуют традиционной теории оптических систем. В данной работе развивается волновой метод описания волновых пучков для решения задач преломления пучков различными средами, дифракции волновых пучков на решетках, расчета квазиоптических резонаторов с диэлектрическими слоями и электронными потоками. При этом используется идея описания параметров пучка с помощью комплексного параметра – варiances пучка, который определяет основные параметра пучка (радиус пятна поля, радиус кривизны волнового фронта, фазовый набег). Определив операторы преобразования варiances пучка на различных элементах, трансформирующих волновые пучки, возможно построить операторный метод расчета параметров пучков при их прохождении через сложные квазиоптические системы.

Общая методология решения поставленных задач – это представление волнового пучка в виде континуальной суперпозиции плоских волн и сворачивание интегральных представлений пучков на выходе в параксиальном приближении, что аналогично методу параболического уравнения, когда полученное решение удовлетворяет не волновому, а параболическому уравнению.

Параксиальные расчеты квазиоптических систем, трансформирующих волновые пучки, обращены к широкому кругу читателей, разрабатывающих или использующих квазиоптические системы, генераторы дифракционного излучения. Излагаемый материал базируется на простых и наглядных математических и физических понятиях, но без упрощения сути рассматриваемого явления. Конечные формулы представлены в удобном для расчетов виде. Следует отметить, что при параксиальных расчетах не учитывается диафрагмирование волновых пучков, однако это вполне оправдано в большинстве квазиоптических систем.

В целом, изложенные в монографии результаты предназначены для использования при проектировании и расчетах квазиоптических приборов и систем различного назначения. Автор выражает благодарность проф. Петченко А. М. за интерес к работе и стимулирование, а также Добробабе И. Н. за техническую помощь.

# ГЛАВА 1. ПРЕЛОМЛЕНИЕ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

## 1.1 Отражение и преломление волнового пучка на границе раздела различных сред

Прохождение волнового пучка через плоскую границу раздела имеет ряд особенностей по сравнению с плоской волной. На это обращалось внимание в [1], где рассмотрена двумерная задача. Отражение и преломление трехмерного пучка на плоской границе раздела рассмотрено в [2,3], где каждая плоская волна в представлении поля пучка по плоским волнам разложена на две линейные поляризации, введена поляризация пучка и рассмотрено отражение и преломление каждой плоской волны с последующим интегрированием для получения окончательных результатов. В настоящей работе рассмотрение ведется на основе решения граничной задачи для всего пучка, а не отдельной плоской волны в разложении пучка по плоским волнам. Это позволяет более корректно подойти к записи полей отраженного и преломленного пучков и выяснить причины преобразования падающего пучка в другие типы пучков.

### *1. Поле падающего волнового пучка*

Пусть волновой пучок падает на границу раздела двух изотропных диэлектриков с параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1$  и  $\varepsilon_2, \mu_2$  под углом  $\varphi_1$ . С падающим пучком свяжем систему координат  $x_1, y_1, z_1$  так, что ее центр находится в горловине пучка, ось  $z_1$  совпадает с осью падающего пучка, а плоскость  $x_1, z_1$  и является плоскостью падения.

Компоненты поля пучка записываются в виде

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(x_1, y_1, z_1) &= \vec{E}_{01}(x_1, y_1, z_1) \exp(ik_0 n_1 z_1), \\ \vec{H}_1(x_1, y_1, z_1) &= \vec{H}_{01}(x_1, y_1, z_1) \exp(ik_0 n_1 z_1),\end{aligned}$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,  $\omega$  - циклическая частота,  $c$  - скорость света в вакууме,  $n_1 = (\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2}$ ,  $\vec{E}_{01}$  и  $\vec{H}_{01}$  - медленно меняющиеся функции координат по сравнению с экспонентой и удовлетворяющие параболическому дифференциальному уравнению.

Поле произвольного поляризованного пучка можно разложить на две поляризации: горизонтальную (или  $s$  - поляризацию) и вертикальную (или  $p$  - поляризацию). Следуя дифракционной терминологии горизонтально поляризованный пучок будем называть  $E$  - поляризованным, а вертикально поляризованный -  $H$  - поляризованным пучком.

Для  $E$  - поляризованного пучка задано  $\vec{E}_{oy_1}$ ,  $H_{oy_1}^{(E)} = 0$ ,  $E_{ox_1}^{(E)} = 0$ , и все остальные компоненты определяются через  $E_{oy_1}$

$$H_{ox_1}^{(E)} = -w_1^{-1} E_{oy_1}, \quad E_{oz_1}^{(E)} = \frac{i}{k_o \varepsilon_1 w_1} \partial y_1 E_{oy_1}, \quad H_{oz_1}^{(E)} = -\frac{i}{k_o \mu_1} \partial x_1 E_{oy_1} \quad (1)$$

Для  $H$  - поляризованного пучка задано  $H_{oy_1}, E_{oy_1}^{(H)} = 0, H_{ox_1}^{(H)} = 0$ , а все остальные компоненты определяются через  $H_{oy_1}$ :

$$E_{ox_1}^{(H)} = w_1 H_{oy_1}, \quad E_{oz_1}^{(H)} = \frac{i}{k_o \varepsilon_1} \partial x_1 H_{oy_1}, \quad H_{oz_1}^{(H)} = \frac{i w_1}{k_o \mu_1} \partial x_1 H_{oy_1}, \quad (2)$$

где  $w_1 = (\mu_1 / \varepsilon_1)^{1/2}$  - импеданс диэлектрика, в котором распространяется падающий пучок. Как видно из (1), (2) волновые пучки, в отличие от плоских волн, имеют продольные компоненты электрического и магнитного полей, обусловленные конечными размерами пучка в поперечном направлении.

Падающий волновой пучок зададим в виде

$$\{E_{y_1}(m, n), H_{y_1}(m, n)\} = \Psi_m(x_1, z_1) \Psi_n(y_1, z_1) \exp(ik_o n_1 z_1), \quad (3)$$

где

$$\Psi_l(\zeta_1, z_1) = (n_1 A_{o\zeta_1} / A_{\zeta_1})^{1/4} H_l((k_o n_1 / A_{\zeta_1})^{1/2} \zeta_1) \times \\ \times \exp[-k_o n_1 \zeta_1^2 / 2 A_{\zeta_1} + ik_o n_1 \zeta_1^2 / 2 R_{\zeta_1} - i(l + 1/2) u_{\zeta_1}(z_1)] \quad (4)$$

$$l = \{m, n\}, \quad \zeta_1 = \{x_1, y_1\},$$

$\Psi_l(\zeta, z)$  - функции Гаусса-Эрмита,  $H_l(\zeta)$  - полином Эрмита  $l$  - го порядка.

Параметры пучка  $A_{\zeta_1}, R_{\zeta_1}, u_{\zeta_1}$  определяются через основной параметр гауссового пучка

$$V_{\zeta_1}(z_1) = n_1 A_{o\zeta_1} + iz_1, \quad (5)$$

называемый вариансом гауссового волнового пучка [4], по формулам

$$A_{\zeta_1}^{-1} = \text{Re} V_{\zeta_1}^{-1}, \quad A_{\zeta_1} = n_1 A_{o\zeta_1} [l + q_{\zeta_1}^2], \\ R_{\zeta_1}^{-1} = -\text{Im} V_{\zeta_1}^{-1}, \quad R_{\zeta_1} = z_1 [l + q_{\zeta_1}^{-2}], \quad (6)$$

$$u_{\zeta_1} = \arctg q_{\zeta_1}, \quad q_{\zeta_1} = (\text{Im} V_{\zeta_1}) / (\text{Re} V_{\zeta_1}) = z_1 / (n_1 A_{o\zeta_1})$$

Параметр  $A_{\zeta_1}$  определяет радиус  $r_{\zeta_1}$  пятна поля пучка вдоль оси  $\zeta_1$ , а  $A_{o\zeta_1}$  - радиус  $r_{o\zeta_1}$ , пятна поля в горловине пучка:

$$A_{\zeta_1} = k_o n_1 r_{\zeta_1}^2 / 2, \quad A_{o\zeta_1} = k_o r_{o\zeta_1}^2 / 2.$$

Величина  $R_{\zeta_1}$  является радиусом кривизны волновой поверхности пучка, а фаза варианса  $u_{\zeta_1}$  определяет дополнительный фазовый набег пучка, обусловленный кривизной его волнового фронта.

Продольные составляющие поля пучка определяются формулами

$$E_{z_1}^{(H)} = (i / \varepsilon_1) \Psi_{m \pm 1}(x_1, z_1) \Psi_n(y_1, z_1) \exp(ik_o n_1 z_1), \\ H_{z_1}^{(H)} = (i w_1 / \mu_1) \Psi_m(x_1, z_1) \Psi_{n \pm 1}(y_1, z_1) \exp(ik_o n_1 z_1),$$

$$E_{z_1}^{(E)} = H_{z_1}^{(E)}, H_{z_1}^{(E)} = -(\varepsilon_1 / \mu_1) E_{z_1}^{(H)}, \quad (7)$$

где

$$\Psi_{l \pm 1}(\zeta_1, z_1) = k_o^{-1} \partial_{\zeta_1} \Psi_l(\zeta_1, z_1) = (n_1 / k_o A_{\zeta_1})^{1/2} \times \\ \times \left[ 2l(1 - A_{\zeta_1} / 2V_{\zeta_1}) \Psi_{l-1}(\zeta_1, z_1) e^{-iu\zeta_1} - (A_{\zeta_1} / 2V_{\zeta_1}) \Psi_{l+1}(\zeta_1, z_1) e^{iu\zeta_1} \right]$$

Поле продольных компонентов гауссова пучка имеет более сложную зависимость от поперечных координат по сравнению с полем поперечных компонентов пучка. В них присутствуют функции Гаусса-Эрмита, отличающиеся на  $\pm 1$  от порядка соответствующей функции для поперечных компонент. Кроме того, продольные компоненты являются величинами первого порядка малости по параметру  $(k_o A_{o\zeta_1})^{-1/2}$  по сравнению с поперечными компонентами.

## 2. Решение граничной задачи

Граничную задачу рассмотрим на примере  $E$  - поляризованного пучка. Для решения граничной задачи представление падающего пучка в виде (3) неудобно. Для этого целесообразно воспользоваться разложением полей в интеграл Фурье по плоским волнам

$$E_{y_1} = \frac{k_1^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{mn}(\xi_{x_1}, \xi_{y_1}) \exp i k_1 (\xi_{x_1} x_1 + \xi_{y_1} y_1 + \xi_{z_1} z_1) d\xi_{x_1} d\xi_{y_1}, \quad (8)$$

где  $F_{mn}(\xi_{x_1}, \xi_{y_1})$  - Фурье - преобразование (3) при  $z_1 = 0$ ,  $\xi_{z_1} = (1 - \xi_{x_1}^2 - \xi_{y_1}^2)^{1/2}$ ,  $k_1 = k_o n_1$ . Поле пучка в виде (8) представляет собой континуальную суперпозицию плоских волн, волновые векторы  $\vec{k}_1$  которых лежат в узком конусе около направления распространения пучка. Проводя интегрирование в (8) в параболическом приближении, т. е. раскладывая  $\xi_{z_1}$  с точностью до квадратичных членов, получим исходное поле (3) гауссова пучка.

Поле преломленного и отраженного пучков запишем в виде

$$E_{y_j} = (k_j / 2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{y_j}(\xi_{x_j}) F_{mn}(\xi_{x_1}, \xi_{y_1}) \exp(i k_1 \xi_{z_1} l_1) \times \\ \times \exp i k_j (\xi_{x_j} x_j + \xi_{y_j} y_j + \xi_{z_j} z_j) d\xi_{x_1} d\xi_{y_1} \\ (j = 2, 3), \quad (9)$$

где индекс  $j = 2$  обозначаем преломленный пучок,  $j = 3$  - отраженный,  $k_2 = k_o n_2$ ,  $k_3 = k_1$ ,  $l_1$  - расстояние от горловины падающего пучка вдоль оси пучка до точки ее пересечения с границей раздела; ось  $z_2$  совпадает с осью преломленного пучка, ось  $z_3$  - с осью отраженного,  $\xi_{z_j} = (1 - \xi_{x_j}^2 - \xi_{y_j}^2)^{1/2}$ ;  $\tilde{E}_{y_j}$  - неизвестная спектральная амплитуда.

Переходя от систем координат  $x_j, y_j, z_j$ , связанных с пучками, к системе координат  $x, y, z$ , связанной с границей раздела и, приравнивая фазовые множители для полей вдоль осей  $x$  и  $y$ , получаем

$$n_1(\xi_{x_1} \cos \varphi_1 + \xi_{z_1} \sin \varphi_1) = n_2(\xi_{x_2} \cos \varphi_2 + \xi_{z_2} \sin \varphi_2) \quad (10)$$

$$\xi_{x_1} \cos \varphi_1 + \xi_{z_1} \sin \varphi_1 = \xi_{x_3} \cos \varphi_3 + \xi_{z_3} \sin \varphi_3 \quad (11)$$

$$n_1 \xi_{y_1} = n_2 \xi_{y_2} = n_1 \xi_{y_3} \quad (12)$$

Как уже упоминалось, при интегрировании в параболическом приближении величины  $\xi_{z_j}$  в фазе раскладываются в ряд с точностью до квадратичных членов. Но это относится лишь к  $\xi_{z_j}$ , стоящих в произведениях  $\xi_{z_j} z_j$ . Квадратичные члены разложения в этом случае описывают поперечную диффузию амплитуды при распространении пучка вдоль оси  $z_j$ . Фазовые соотношения (10), (11) относятся к координатам  $x, y$ , связанным с границей раздела, из них определяется связь между переменными интегрирования  $\xi_{x_1}$ ,  $\xi_{y_1}$  и переменными подынтегральных выражений  $\xi_{x_j}$ ,  $\xi_{z_j}$  ( $j=2,3$ ). Поэтому квадратичными членами в разложении  $\xi_{z_j}$  в (10), (11) можно пренебречь. Т. о., пренебрегая квадратичными членами в  $\xi_{z_j}$  в (10), (11), получаем

$$\begin{aligned} \xi_{x_2} &= n_{12} t_{12} \xi_{x_1}, \quad \xi_{x_3} = -\xi_{x_1} \\ \xi_{y_2} &= n_{12} \xi_{y_1}, \quad \xi_{y_3} = \xi_{y_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$n_{12} = n_1 / n_2, \quad t_{12} = \cos \varphi_1 / \cos \varphi_2.$$

Падающий  $E$  - поляризованный пучок имеет четыре компонента

$$\{E_{y_1}, H_{x_1}, E_{z_1}, H_{z_1}\}$$

Наличие продольной компоненты  $E_{z_1}$ , приводит к тому, что в отраженном и преломленном пучках возникает кросс - поляризованная компонента с составляющими  $\{E_{x_j}, H_{y_j}\}$  и они имеют все шесть компонент поля:

$$\{E_{y_j}, H_{x_j}, H_{z_j}, E_{z_j}\}; \{E_{x_j}, H_{y_j}\}, \quad (j=2,3)$$

Удовлетворяя граничным условиям на границе раздела диэлектриков, получаем:

1) из непрерывности  $E_y$

$$1 - \tilde{E}_{y_3} = \tilde{E}_{y_2} \quad (14)$$

2) из непрерывности  $H_x$

$$w_1^{-1} (1 - \tilde{E}_{y_3}) (\cos \varphi_1 - \xi_{x_1} \sin \varphi_1) = w_2^{-1} E_{y_2} (\cos \varphi_2 - \xi_{x_2} \sin \varphi_2) \quad (15)$$

3) из непрерывности  $E_x$

$$\xi_{y_1} \sin \varphi_1 (1 + \tilde{E}_{y_3}) - \tilde{E}_{x_3} \cos \varphi_1 = \tilde{E}_{y_2} \xi_{y_2} \sin \varphi_2 + \tilde{E}_{x_2} \cos \varphi_2 \quad (16)$$



4) из непрерывности  $H_y$

$$w_1^{-1} \tilde{E}_{x_3} = w_2^{-1} \tilde{E}_{x_2} \quad (17)$$

Из уравнений (14), (15) получаем

$$\tilde{E}_{y_2}(\xi_{x_1}) = \frac{2w_2(\cos \varphi_1 - \xi_{x_1} \sin \varphi_1)}{w_2(\cos \varphi_1 - \xi_{x_1} \sin \varphi_1) + w_1(\cos \varphi_2 - \xi_{x_2} \sin \varphi_2)} \quad (18)$$

$$\tilde{E}_{y_3}(\xi_{x_1}) = \frac{w_2(\cos \varphi_1 - \xi_{x_1} \sin \varphi_1) - w_1(\cos \varphi_2 - \xi_{x_2} \sin \varphi_2)}{w_2(\cos \varphi_1 - \xi_{x_1} \sin \varphi_1) + w_1(\cos \varphi_2 - \xi_{x_2} \sin \varphi_2)} \quad (19)$$

Формулы (18), (19) определяют спектральные коэффициенты Френеля для основной поляризации  $E$  - поляризованного отраженного и преломленного волновых пучков. При  $\xi_x = 0$  они переходят в коэффициенты Френеля для плоской  $E$  - поляризованной волны. Из (15), (16) совместно с (18), (19) с точностью до членов первого порядка по  $\xi_{y_1}$  имеем

$$\tilde{E}_{x_j}(\xi_{y_1}) = \xi_{y_1} \tilde{E}_{x_j}, \quad (j = 2, 3)$$

$$\tilde{E}_{x_2} = \frac{2w_2^2 \cos \varphi_1 [\sin \varphi_1 - (n_1/n_2) \sin \varphi_2]}{(w_2 \cos \varphi_2 + w_1 \cos \varphi_1)(w_2 \cos \varphi_1 + w_1 \cos \varphi_2)} \quad (20)$$

$$\tilde{E}_{x_3} = \frac{2w_1 w_2 \cos \varphi_1 [\sin \varphi_1 - (n_1/n_2) \sin \varphi_2]}{(w_2 \cos \varphi_2 + w_1 \cos \varphi_1)(w_2 \cos \varphi_1 + w_1 \cos \varphi_2)} \quad (21)$$

Формулы (20), (21) определяют спектральные коэффициенты Френеля для кросс – поляризованной компоненты в  $E$  - поляризованном отраженном и преломленном пучках.

При переходе к плоской волне ( $\xi_{y_1} = 0$ ) кросс – поляризованная компонента исчезает. Формула (21) с точностью до знака (т. к. разные знаки у зависимости от времени) совпадает с формулой, полученной иным способом в [2]. При  $\varphi_1 = 0$  продольные компоненты падающего пучка перпендикулярны к границе раздела диэлектриков и кросс – поляризованная компонента в отраженном и преломленном пучках не возникает.

### 3. Поле отраженного и преломленного пучков

Проводя в (9) замены (13) и раскладывая  $\tilde{E}_{y_2}(\xi_{x_1})$  и  $\tilde{E}_{y_3}(\xi_{x_1})$  в ряд по  $\xi_{x_1}$ , с точностью до линейных членов

$$\tilde{E}_{y_j}(\xi_{x_1}) = \tilde{E}_{y_j}(0) - \xi_{x_1} \tilde{E}_{y_j}', \quad (j = 2, 3) \quad (22)$$

где

$$\tilde{E}_{y_2}' = \frac{2w_1 w_2 (n_{12} t_{12} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)}{(w_2 \cos \varphi_1 + w_1 \cos \varphi_2)^2}, \quad (23)$$

$$\tilde{E}_{y_3}' = (-1)^{m+1} \tilde{E}_{y_2}', \quad n_{12} = n_1/n_2, \quad (24)$$

а фазовые множители  $\xi_{z_j}$  - в ряд по  $\xi_{x_1}$  и  $\xi_{y_1}$  с точностью до квадратичных

членов и, вычисляя интегралы (9), в результате получаем

$$\bar{E}_j = \left\{ \begin{aligned} &\bar{y}_o \left[ E_{oyj}^{(m,n)} + E_{oyj}^{(m+1,n)} + E_{oyj}^{(m-1,n)} \right] + \\ &+ \bar{x}_o \left[ E_{oxj}^{(m,n+1)} + E_{oxj}^{(m,n-1)} \right] \end{aligned} \right\} \exp(ik_o n_j z_j), \quad (25)$$

где

$$E_{oxj}^{(m,n)} = \tilde{E}_{y_j}(0) \Psi_m(x_j) \Psi_n(y_j) \quad (26)$$

$$E_{oyj}^{(m+1,n)} = \frac{i\tilde{E}'_{y_j}}{2n_l(k_o A_{ox_l})^{1/2}} \Psi_{m+1}(x_j) \Psi_n(y_j) \quad (27)$$

$$E_{oyj}^{(m-1,n)} = -\frac{im\tilde{E}'_{y_j}}{n_l(k_o A_{ox_l})^{1/2}} \Psi_{m-1}(x_j) \Psi_n(y_j) \quad (28)$$

$$E_{oxj}^{(m,n+1)} = \frac{i\tilde{E}_{x_j}}{2n_l(k_o A_{oy_l})^{1/2}} \Psi_m(x_j) \Psi_{n+1}(y_j) \quad (29)$$

$$E_{oxj}^{(m,n-1)} = -\frac{in\tilde{E}_{x_j}}{n_l(k_o A_{oy_l})^{1/2}} \Psi_m(x_j) \Psi_{n-1}(y_j) \quad (30)$$

Для  $H$  - поляризованного пучка надо сделать замены

$$E_y \rightarrow H_y, \quad E_x \rightarrow H_x, \quad w_l \leftrightarrow w_2.$$

Таким образом, при наклонном падении моды  $E_{oy_l}^{(m,n)}$  на границу раздела двух диэлектриков поля отраженного и преломленного пучков состоят из пяти мод: помимо пучков того же типа  $(m,n)$ , что и падающий, содержатся пучки  $(m+1,n)$  и  $(m-1,n)$  - типов той же поляризации и кросс – поляризованные пучки  $(m,n+1)$  и  $(m,n-1)$  - типов. Дополнительные пучки  $(m \pm 1,n)$  - типов основной поляризации имеют ту же структуру поля, что продольная составляющая  $H_{z_l}$  падающего пучка, а кросс – поляризованные пучки  $(m,n \pm 1)$  - типов – ту же структуру, что и продольная составляющая  $E_{z_l}$  падающего пучка. Это позволяет прийти к выводу, что именно эти компоненты поля падающего пучка, отсутствующие у плоской волны, и являются источниками частичной трансформации  $(m,n)$  - типа падающего пучка в  $(m \pm 1,n)$  и  $(m,n \pm 1)$  - типы в отраженном и преломленном пучках. В пользу этого говорит и структура формул (18), (19), в которых первое слагаемое в скобках описывает вклад поперечной компоненты поля  $H_{x_j}$ , а второе, ответственное за возникновение  $(m \pm 1,n)$  - типов – вклад продольной составляющей  $H_{z_j}$ . Продольные компоненты пучка наводят вдоль границы раздела диэлектриков токи смещения, которые и порождают дополнительные отраженные и преломленные пучки  $(m \pm 1,n)$  и  $(m,n \pm 1)$  - типов. При нормальном падении пучка на границу раздела продольные компоненты падающего пучка токов смещения вдоль границы раздела не создают,

дополнительные пучки не возникают. Это электродинамическая трактовка природы возникновения пучков иных типов при отражении и преломлении. В [2,3] дана волновая трактовка возникновения кросс – поляризованных пучков. Поле каждой плоской волны падающего пучка раскладывается на  $S$  - и  $P$  - поляризацию так, что у каждой волны  $E_{x_j} = 0$ . Но при отражении и преломлении  $S$  - и  $P$  - поляризованные плоские волны ведут себя различным образом, вследствие чего в отраженном и преломленных полях  $E_{x_j} \neq 0$ , ( $j = 2, 3$ ), т. е. возникает кросс – поляризационная компонента и соответствующие ей пучки  $(m, n \pm 1)$  - типов. Природа возникновения пучков  $(m \pm 1, n)$  - типов в [2,3] не описана.

Амплитуды отраженного и преломленного пучков  $(m \pm 1, n)$  и  $(m, n \pm 1)$  - типов пропорциональна малому параметру

$$\alpha_\zeta = \left( k_o A_{o_{\zeta_1}} \right)^{-1/2} = \left( \sqrt{2} \pi r_{o_{\zeta_1}} / \lambda_o \right)^{-1}, \quad (31)$$

т. е. они являются величинами первого порядка малости по параметру  $\alpha_\zeta$  по отношению к амплитуде основного  $(m, n)$  пучка.

Как уже упоминалось, параболическое приближение для вычисления интегралов (9) предполагает разложение амплитудных множителей с точностью до членов первого порядка и  $\xi_z$ , в произведениях  $\xi_{z_j} z_j$  - с точностью до членов второго порядка малости по  $\xi_{x_1}$  и  $\xi_{y_1}$ . Если же в разложении амплитудных множителей удерживать и члены второго порядка, то это приведет к тому, что в поле отраженного и преломленного пучков появятся пучки  $(m \pm 2, n)$ ,  $(m, n \pm 2)$  типов. Однако их амплитуда пропорциональна  $\alpha_\zeta^2$ , т. е. являются величинами второго порядка малости и, следовательно, процедура неправомерна, так как само поле волновых пучков формулами (27), (30) определено с точностью до величины первого порядка малостей по параметру  $\alpha_\zeta$ .

#### 4. Параметры преломленного и отраженного пучков

Вариансы  $V_{\zeta_j}$  преломленного и отраженного пучков имеют вид

$$V_{\zeta_j}(z_j) = V_{\zeta_j}(0) + iz_j, \quad (\zeta_j = x_j, y_j), \quad (32)$$

где

$$V_{\zeta_j}(0) = D_{\zeta_j} V_I(l_1) \quad (33)$$

$$D_{\zeta_j} = (n_j / n_1) t_{\zeta_j}^2 \quad (34)$$

и все  $t_{\zeta_j} = 1$ , кроме  $t_{x_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}$ . Формулу (33) можно рассматривать как

правило преобразования варианта падающего пучка в варианты преломленного и отраженного пучков, а величину  $D_{\zeta_j}$  - как оператор преобразования варианта

на границе раздела двух диэлектриков. Формула (32) определяет изменение дисперсии пучка при его распространении в однородной среде. Формулы (32) – (34), совместно с формулами для коэффициентов Френеля, вполне достаточно, чтобы определить параметры волнового пучка в любой области многослойной среды с плоскими границами раздела.

Параметры  $A_{\zeta_j}$ ,  $R_{\zeta_j}$  и  $U_{\zeta_j}$  преломленного и отраженного пучков определяются через  $V_{\zeta_j}$  по формулам (6) с заменой  $\zeta_1 \rightarrow \zeta_j$ . Параметр  $A_{\zeta_j}$  определяет радиус пятна поля  $r_{\zeta_j}$  вдоль поперечной координаты  $\zeta_j$  по формуле

$$A_{\zeta_j} = n_j A_{o\zeta_j} t_{\zeta_j}^2 \left[ 1 + g_{\zeta_j}^2 \right], \quad (35)$$

где

$$g_{\zeta_j} = \left( \frac{n_j}{n_1} t_{\zeta_j}^2 l_1 + z_j \right) / n_j A_{o\zeta_j} t_{\zeta_j}^2$$

Из (35) следует соотношение для радиусов пятен поля пучков на границе раздела

$$r_{\zeta_j}(0) = r_{\zeta_1}(l_1) t_{\zeta_j} \quad (36)$$

Таким образом, вследствие преломления изменяется поперечный размер преломленного пучка в плоскости падения на границе раздела. Если падает пучок с круглой формой поперечного сечения, то в отраженных пучках круговая форма сохраняется, а преломленные пучки имеют эллиптическую форму поперечного сечения и, если  $n_2 > n_1$ , то в плоскости падения лежит большая ось эллипса, а если  $n_2 < n_1$  – то малая. Непрерывными при переходе через границу раздела остаются величины

$$r_{x_2}(0) / \cos \varphi_2 = r_{x_1}(l_1) / \cos \varphi_1$$

Для получения функции распределения поля пучков в плоскости границы раздела надо учесть, что для границы раздела  $x_j = x \cos \varphi_j$ . При этом с учетом (33) для полей пучков выполняется равенство

$$E_{oy_1}(x, y, 0) + E_{oy_3}(x, y, 0) = E_{oy_2}(x, y, 0),$$

т. е. тангенциальные составляющие полного поля непрерывны при переходе через границу раздела.

Расхождение пучков  $\Theta_{\zeta_j}$  вдоль поперечной координаты  $\zeta_j$  определяются формулой

$$\Theta_{\zeta_j} = \left( 2 / n_j^2 k_o A_{o\zeta_1} t_{\zeta_j}^2 \right)^{1/2} = \lambda_o / n_j \pi r_{o\zeta_1} t_{\zeta_j}$$

Таким образом, при преломлении пучка границей раздела и отражении от нее величина

$$J_{\zeta_j} = n_j t_{\zeta_j} \Theta_{\zeta_j}$$

остается постоянной. Это согласуется с [4], где эта величина названа инвариантом волнового пучка.

Потоки энергии, переносимые возникающими на границе раздела пучками  $(m \pm 1, n)$  и  $(m, n \pm 1)$  - типов, являются величинами первого порядка малости по параметру  $\alpha_\zeta$  по сравнению с потоками энергии, переносимыми пучками того же  $(m, n)$  - типа, что и падающий пучок. Поэтому в рамках используемого параболического приближения ими можно пренебречь. При этом выполняется закон сохранения энергии в виде

$$\Pi_{z_1}^{(m,n)} = \Pi_{z_2}^{(m,n)} + \Pi_{z_3}^{(m,n)},$$

где

$$\Pi_{z_j}^{(m,n)} = \frac{c}{4\pi} \frac{t_{x_j}}{\varpi_j} k_o^{-1} (A_{ox_1} A_{oy_1})^{1/2} c_n c_m |E_{y_j}|^2,$$

$$c_l = 2^l \pi^{1/2} l!, \quad (l = m, n), \quad |E_{y_l}| = 1$$

В заключении отметим, что в оптическом диапазоне отраженными и преломленными пучками  $(m \pm 1, n)$  и  $(m, n \pm 1)$  типов можно пренебречь в силу того, что  $k_o A_o \alpha_{\zeta_1} \gg 1$ . Их можно наблюдать только при очень больших интенсивностях падающего пучка. В квазиоптическом диапазоне волн (мм и субмм диапазона) преобразование в пучки  $(m \pm 1, n)$  и  $(m, n \pm 1)$  типов на границе раздела в амплитудном анализе необходимо учитывать только при достаточно больших длинах волн.

## 1.2 Прохождение гауссовых волновых пучков через слоистый изотропный диэлектрик с плоскими границами раздела

Показано, что прошедший и отраженный от плоской границы раздела двух диэлектриков волновые пучки являются гауссовыми пучками того же порядка, что и падающий. Введен оператор преобразования варiances пучка на плоской границе раздела. В пренебрежении многократными отражениями, с использованием введенного оператора преобразования определено поле волнового пучка, прошедшего слоистый диэлектрик с произвольным числом непараллельных границ.

### 1. Распространение гауссовых пучков в однородном диэлектрике

Рассмотрим прохождение гауссового волнового пучка  $m$  - го порядка

$$u_m^{(o)}(x, z) = \sqrt[4]{\frac{n_1 A_o}{A}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_1}{A}} x \right) e^{-\frac{k_o n_1 x^2}{2A} + i \frac{k_o n_1 x^2}{2R}} e^{i k_o n_1 z - i \left( m + \frac{1}{2} \right) u}, \quad (1)$$

распространяющегося в среде с показателем преломления  $n_1$  через слоистый диэлектрик. Под скалярной функцией  $u_m^{(o)}$  будем понимать поперечную составляющую вектора напряженности электрического поля пучка.

Для определения структуры поля прошедшего и отраженного пучков представление падающего пучка в форме (1) неудобно. Для этого целесообразно воспользоваться интегральным представлением поля волнового

пучка (1), представляющим собой континуальную суперпозицию плоских волн, волновые векторы которых лежат в узком конусе около направления распространения пучка. Если поле в плоскости  $z=0$ , где находится горловина пучка, задать в виде

$$u_m^{(o)}(x,0) = H_m \left( \sqrt{\frac{k_o}{A_o}} x \right) e^{-\frac{k_o x^2}{2A_o}},$$

где  $H_m(x)$  - полиномы Эрмита,  $k_o = \frac{\omega}{c}$ ,  $A_o = \frac{k_o w_o^2}{2}$ ,  $w_o$  - радиус пятна поля в горловине, то поле в произвольной плоскости определится формулой

$$u_m^{(o)}(x,z) = \frac{k_o n_l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^o(\xi) e^{ik_o n_l \sqrt{1-\xi^2} z} e^{ik_o n_l \xi x} d\xi, \quad (2)$$

где  $F_m^o(\xi)$  - Фурье – преобразование функции  $u_m^{(o)}(x,0)$

$$u_m^{(o)}(x,0) = \frac{k_o n_l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^o(\xi) e^{ik_o n_l \xi x} d\xi$$

$$F_m^o(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi A_o}{k_o}} i^m (-1)^m e^{-\frac{k_o n_l^2 A_o \xi^2}{2}} H_m(n_l \sqrt{k_o A_o} \xi) \quad (3)$$

Переменная интегрирования  $\xi = \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - углы, оставляемые плоскими волнами в разложении (2) с осью пучка  $oz$ .

Проводя интегрирование в формуле (2) в параболическом приближении, т. е. раскладывая  $\sqrt{1-\xi^2}$  в ряд с точностью до квадратичных членов, с использованием теоремы свертки, получаем

$$u_m^{(o)}(x,z) = \sqrt{\frac{V'}{V} \left( \frac{V^*}{V} \right)^{\frac{m}{2}}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_l V'}{|V|^2}} x \right) e^{-\frac{k_o n_l x^2}{2V}} e^{ik_o n_l z}, \quad (4)$$

где параметры  $V$  определяются формулой

$$V = n_l A_o + iz \quad (5)$$

и  $V' = \text{Re} V$ ,  $V'' = \text{Im} V$ . Если среда без потерь ( $n_l$  - вещественное число), то вводя параметр

$$u = \arctg \frac{V''}{V'}$$

и представляя  $V^{-1}$  в виде

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{A} - i \frac{1}{R}$$

получаем

$$\sqrt{\frac{V'}{V}} = \sqrt{\frac{V'}{A}} e^{-i \frac{1}{2} u}, \left( \frac{V^*}{V} \right)^{\frac{m}{2}} = e^{-imu}, \sqrt{\frac{k_o n_l V'}{|V|^2}} = \sqrt{\frac{k_o n_l}{A}}.$$

При этом формула (4) преобразуется к каноническому виду (1).

Комплексный параметр  $V = V' + iV''$  играет фундаментальную роль в

теории гауссовых волновых пучков, и его называют вариа́нсом волнового пучка [4]. Параметр  $V$  определяет все остальные параметры волнового пучка – набег фазы  $u$ , обусловленный расширением волнового пучка при распространении, ширину пятна поля  $A$  и радиус кривизны волнового фронта  $R$ . Этой техникой приведения записи поля гауссового волнового пучка в форме (4) к каноническому виду (1) мы будем в дальнейшем широко пользоваться, определяя параметры  $A$  и  $R$  по формулам

$$A = V'(1 + D^2), \quad R = V''(1 + D^2), \quad (6)$$

где  $D = \frac{V''}{V'} = \text{tgu}$  – называется волновым параметром пучка.

В среде с поглощением ( $n_1 = n'_1 + in''_1$ ) параметр  $V$  определяется формулой

$$V = n'_1 A_0 + i[z + n''_1 A_0] \quad (7)$$

При малом затухании ( $n''_1/n'_1 \ll 1$ ) формула (4) приводится к виду (1) только в области

$$z \gg n''_1 A_0 \quad (8)$$

Таким образом, наличие небольшого поглощения в среде приводит к искажению структуры поля только в области, примыкающей к горловине пучка. При удалении от горловины поле затухающего волнового пучка тем ближе к полю незатухающего, чем дальше сечение пучка от горловины. При больших затуханиях в области отличной от нуля интенсивности структура поля затухающего пучка существенно отлична от поля (1) незатухающего пучка и определяется общей формулой (4). В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать среды без поглощения.

## 2. Прохождение гауссового волнового пучка через границу раздела двух сред

Для определения поля волнового пучка, прошедшего слоистый диэлектрик, рассмотрим сначала прохождение волнового пучка через границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Волновой пучок (1) падает из 1-й среды во 2-ю, угол падения  $\varphi_1$ , угол преломления  $\varphi'_2$ . Преломленный пучок распространяется вдоль оси  $o_2 z_2$ , начало координат которой расположено на границе раздела сред (см. рис. 1).

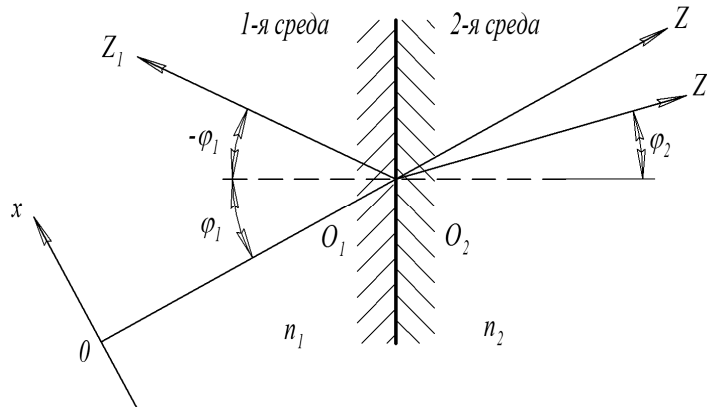


Рисунок 1

Поле прошедшего во 2-ю среду волнового пучка можно записать в виде

$$u_m^{(2)}(x_2, z_2) = \frac{k_o n_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_1(\varphi_1, \xi) F_m^o(\xi) F_m^{l_1}(\xi) e^{ik_o n_2 \sqrt{1-\xi^2} z_2} e^{ik_o n_2 \xi x_2} d\xi, \quad (9)$$

где  $d_1(\varphi_1, \xi)$  - амплитудный коэффициент прохождения Френеля из 1-й среды во 2-ю, вещественный для диэлектриков без потерь, и

$$F_m^{l_1}(\xi) = \exp\left(ik_o n_1 \sqrt{1-\xi^2} l_1\right) \quad (10)$$

Сомножитель  $F_m^{l_1}(\xi)$  является спектральным коэффициентом передачи слоя среды с показателем преломления  $n_1$  на расстояние  $l_1$ . Параметр  $\xi = \sin \beta$ , где  $\beta$  - углы, образуемые плоскими волнами в разложении (9) для преломленного пучка с осью пучка  $o_2 z_2$ .

Используя законы преломления

$$\begin{aligned} n_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) &= n_2 \sin(\varphi'_2 + \beta) \\ n_1 \sin \varphi_1 &= n_2 \sin \varphi'_2 \end{aligned} \quad (11)$$

получаем

$$\xi = \frac{n_1}{n_2} t_{12} \xi + o(\xi^2), \quad (12)$$

где

$$t_{12} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi'_2} \quad (13)$$

Проводя интегрирование в (9) в параболическом приближении имеем

$$u_m^{(2)}(x_2, z_2) = d_1(\varphi_1) \sqrt{\frac{V'_2}{V_2} \left(\frac{V_2^*}{V_2}\right)^{\frac{m}{2}}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_2 V'_2}{|V_2|^2}} x_2 \right) e^{-\frac{k_o n_2 x_2^2}{2V_2}} e^{ik_o (n_1 l_1 + n_2 z_2)}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} d_1(\varphi_1) &= d_1(\varphi_1, \xi) \big|_{\xi=0}, \quad t_{21} = t_{12}^{-1}, \\ V_2 &= n_2 A_o t_{21}^2 + i \left[ \frac{n_2}{n_1} t_{21}^2 l_1 + z_2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Используя технику, описанную в разделе 1.21, окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_m^{(2)}(x_2, z_2) &= d_1(\varphi_1) \sqrt{\frac{V'_2}{V_2}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_2}{A_2}} x_2 \right) e^{-\frac{k_o n_2 x_2^2}{2A_2} + i \frac{k_o n_2 x_2^2}{2R_2}} \times \\ &\times e^{ik_o (n_1 l_1 + n_2 z_2) - i \left( m + \frac{1}{2} \right) u_2} \end{aligned} \quad (16)$$

где параметры пучка  $A_2$  и  $R_2$  определяются через вариант  $V_2$  по формулам (6). Таким образом, в среде без потерь поле преломленного пучка так же является гауссовым волновым пучком того же порядка, что и падающий пучок. Полученная формула (16) справедлива при углах падения  $\varphi_1 < \varphi_{1кр}$ , где  $\varphi_{1кр}$  - предельный угол полного внутреннего отражения при переходе из 1-й среды во



2-ю.

При приближении угла падения к предельному углу полного внутреннего отражения  $t_{2l} \rightarrow 0$  и  $V'_2 \rightarrow 0$ . Условие параксиальности волнового пучка  $V' \gg 1$ . Таким образом, полученная формула (16) справедлива в области углов падения, для которой

$$n_2 A_o t_{2l}^2 \gg 1.$$

Аналогично для отраженного волнового пучка имеем

$$u_m^{(l)}(x_l, z_l) = r_l(\varphi_l) \sqrt{\frac{V'_l}{A_l}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_l}{A_l}} x_l \right) e^{-\frac{k_o n_l x_l^2}{2 A_l} + i \frac{k_o n_l x_l^2}{2 R_l}} \times \\ \times e^{ik_o n_l (l_l + z_l) - i \left( m + \frac{l}{2} \right) u_l} \quad (17)$$

где  $r_l(\varphi_l) = r_l(\varphi_l, \xi) \Big|_{\xi=0}$  - амплитудный коэффициент отражения Френеля.

Варианс  $V_l$  отраженного пучка определяется формулой

$$V_l = n_l A_o + i[l_l + z_l] \quad (18)$$

Таким образом и отраженный от границы раздела пучок является гауссовым волновым пучком того же порядка, что и падающий. Ось  $o_l z_l$  совпадает с осью отраженного пучка, начало отсчета координаты  $z_l$  лежит на границе раздела (см. рис. 1).

Для диэлектриков без потерь коэффициенты Френеля  $r$  и прохождения  $d$  имеют вид

1) для горизонтальной поляризации (с вектором  $\vec{E}$  перпендикулярным плоскости падения)

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi_l - \varphi'_2)}{\sin(\varphi_l + \varphi'_2)}, \quad d_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi_l \sin \varphi'_2}{\sin(\varphi_l + \varphi'_2)} \quad (19)$$

2) для вертикальной поляризации (с вектором  $\vec{E}$ , лежащим в плоскости падения)

$$r_{\parallel} = \frac{\sin(\varphi_l - \varphi'_2)}{\sin(\varphi_l + \varphi'_2)}, \quad d_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi_l \sin \varphi'_2}{\sin(\varphi_l + \varphi'_2) \cos(\varphi_l - \varphi'_2)} \quad (20)$$

Средний во времени поток энергии переносимый пучком (при соответствующей нормировке пучка) определяется энергетическими коэффициентами отражения и прохождения

$$R = r^2, \quad D = \frac{n_2}{n_l} d^2 \quad (21)$$

Закон сохранения энергии при прохождении пучком границы раздела имеет вид

$$R \cos \varphi_l + D \cos \varphi'_2 = \cos \varphi_l \quad (22)$$

Физический смысл формулы (22) состоит в том, что поток энергии, распространяющийся к границе раздела равен сумме отраженного и прошедшего потоков энергии. Легко убедиться, что коэффициенты (21) удовлетворяют условию (22).

В работе [6] при вычислении интеграла (9) предложено использовать разложения

$$\begin{aligned} r(\varphi_1, \xi) &\cong r(\varphi_1) + \xi \cdot r'(\varphi_1) \\ d(\varphi_1, \xi) &\cong d(\varphi_1) + \xi \cdot d'(\varphi_1), \end{aligned} \quad (23)$$

что приводит помимо отражения и преломления гауссова пучка еще и к преобразованию в отраженном и прошедшем полях в другие типы пучков с порядками  $m+1$  и  $m-1$ . Однако закон сохранения энергии при этом не выполняется, что свидетельствует о неправомерности использования разложений (23) и отсутствии преобразования в иные типы волновых пучков при прохождении их через границу раздела. Закон сохранения энергии требует, чтобы модуль коэффициента отражения и преломления был вынесен за знак интеграла при значении  $\xi=0$  ввиду быстрого убывания функции  $F_m^o(\xi)$ . При этом закон сохранения энергии в виде (22) выполняется с точностью до величины второго порядка малости, которыми можно пренебречь и в энергетическом балансе не учитывать.

### 3. Прохождение гауссова пучка через непараллельные границы сред

Будем полагать, что третья среда имеет показатель преломления  $n_3$ , а угол между границами раздела  $\vartheta$ . Условимся считать положительными углы, отсчитываемые от нормали к преломляющей поверхности по часовой стрелке. При этом условии углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2'$  на рисунке 2 будут отрицательными (на рисунке указаны модули этих углов).

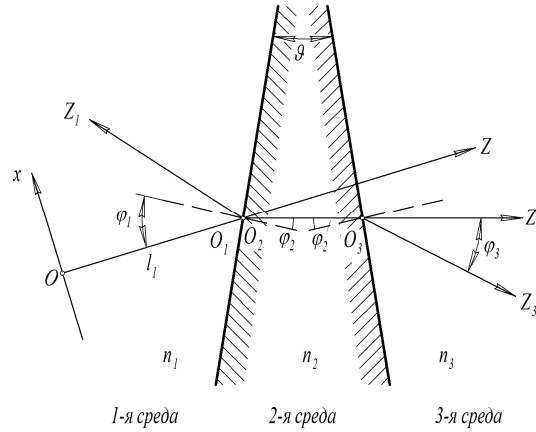


Рисунок 2

Из рисунка 2 видно, что угол  $\varphi_2 = \varphi_2' + \vartheta$ .

Поле в третьей среде можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_m^{(3)}(x_3, z_3) &= \frac{k_o n_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_1(\varphi_1, \xi) d_2(\varphi_2, \zeta) F_m^o(\xi) F_m^{l_1}(\xi) F_m^{l_2}(\zeta) \times \\ &\times e^{ik_o n_3 \sqrt{1-\mu^2} z_3} e^{ik_o n_3 \mu x_3} d\xi \end{aligned} \quad (24)$$

где  $d_2(\varphi_2, \zeta)$  - коэффициенты прохождения Френеля из 2-й среды в 3-ю,

переменная интегрирования  $\mu = \sin \gamma$  где  $\gamma$  - углы образуемые плоскими волнами с осью пучка  $o_3 z_3$  в 3-й среде, начало которой лежит на 2-й границе раздела:

$$F_m^{l_2}(\zeta) = \exp\left(ik_o n_2 \sqrt{1 - \zeta^2} l_2\right)$$

$l_2$  - путь, проходимый волновым пучком во 2-й среде.

Соотношения между углами падения и преломления плоских волн на 1-й границе раздела определяются формулами (11).

Аналогично, для 2-й границы раздела имеем

$$\begin{aligned} n_2 \sin(\varphi'_2 + \vartheta + \beta) &= n_3 \sin(\varphi'_3 + \gamma) \\ n_2 \sin(\varphi'_2 + \vartheta) &= n_3 \sin \varphi'_3 \end{aligned} \quad (25)$$

Решая систему (25) с точностью до членов  $\zeta^2$  получаем

$$\mu = \frac{n_2}{n_3} t_{23} \zeta + o(\zeta^2) \quad (26)$$

где

$$t_{23} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi'_3} \quad (27)$$

С учетом (12) формула (26) преобразуется к виду

$$\mu = \frac{n_1}{n_2} t_{12} t_{23} \xi + o(\xi^2) \quad (28)$$

Проводя интегрирование в (24) в параболическом приближении и преобразуя полученное выражение с использованием формул (6), имеем

$$\begin{aligned} u_m^{(3)}(x_3, z_3) &= d_1(\varphi_1) d_2(\varphi_2) \sqrt{\frac{V'_3}{A_3}} H_m\left(\sqrt{\frac{k_o n_3}{A_3}} x_3\right) \times \\ &\times e^{-\frac{k_o n_3 x_3^2}{2A_3} + i \frac{k_o n_3 x_3^2}{2R_3}} e^{ik_o(n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 z_3) - i\left(m + \frac{1}{2}\right)u_3} \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$d_2(\varphi_2) = d_2(\varphi_2, \xi) \big|_{\xi=0}, \quad t_{32} = t_{23}^{-1}$$

Варианс  $V_3$  для поля в 3-й среде имеет вид

$$V_3 = n_3 A_o t_{32}^2 t_{21}^2 + i \left[ \frac{n_3}{n_1} t_{32}^2 t_{21}^2 l_1 + \frac{n_3}{n_2} t_{32}^2 l_2 + z_3 \right] \quad (30)$$

При  $n_1 = n_3 = n_o$  формула (29) описывает поле гауссового волнового пучка прошедшего через призму, находящуюся в среде с показателем преломления  $n_o$  при условии, что вершина призмы не попадает в пятно поля пучка. При  $\vartheta = 0$  призма превращается в плоскопараллельную пластину и при этом  $t_{32} t_{21} = 1$ . Многократные отражения от поверхностей раздела в расчет не принимаются.

В общем случае коэффициент прохождения  $d(k_x)$  через диэлектрический

слой (здесь  $k_x = k \sin(\varphi_l + \alpha)$ ) является функцией  $k_x$ , обладающей даже для диэлектриков без потерь бесконечным множеством полюсов, которым соответствуют квазисобственные волны – поверхностные (с вещественными волновыми числами  $k_s$ ) и вытекающие (с комплексными волновыми числами  $k_p$ ). Поверхностные волны являются медленными волнами, их постоянные распространения  $k_s$  оказываются далеко за пределами области, где амплитуда  $F_m^o(k_x)$  существенно отлична от нуля. Для слоя с непараллельными границами  $k_s = k_s(x)$ , но для всего пятна поля они все равно за пределами области, где  $F_m^o(k_x)$  существенно отлична от нуля. Поэтому, как известно, оптические пучки не возбуждают в диэлектрическом слое сколь-нибудь заметных поверхностных волн. В отличие от поверхностных вытекающие волны возбуждаются эффективно, если  $\varphi_l \approx \varphi_p$ , где  $\varphi_p$  – угол, под которым происходит утечка энергии из одного (плоскопараллельного) слоя. Для неоднородного, т. е. не плоско параллельного слоя, угол утечки может изменяться с неоднородностью т. е.  $\varphi_p = \varphi_p(x)$ . Ввиду того, что при выводе формул для отраженного и прошедшего полей не учитывалось возбуждение вытекающих волн, то полученные результаты справедливы только при углах падения  $\varphi_l$  достаточно далеко отстоящих от  $\varphi_p(x)$  для всех  $x$ , соответствующих пятну поля на 1-й границе. Определенные выше отраженное и прошедшее поля в виде гауссовых волновых пучков представляют геометрическую часть решения задачи дифракции гауссового волнового пучка на слое диэлектрика, в которой учтены дифракционные эффекты в самом пучке при его распространении, но не учтены дифракционные эффекты при отражении и прохождении через слой. Дифракционная составляющая решения мала, если углы падения на слой далеки от углов утечки, и ее при этом можно не учитывать. Случай, когда углы падения близки к углам утечки (при этом эффективно возбуждаются соответствующие вытекающие волны) нуждается в отдельном рассмотрении, что возможно сделать с использованием результатов работы [7].

#### 4. Прохождение гауссового волнового пучка через слоистую структуру

Как видно из формул (5), (13), (30) вариант волнового пучка  $V_{j+1}$  в каждой последующей  $j+1$ -й среде определяется через вариант  $V_j$  в предыдущей  $j$ -й среде по формуле

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = V_j' \cdot B_j + i[V_j''(l_j) \cdot B_j + z_{j+1}], \quad (31)$$

где  $l_j$  – геометрический путь проходимый волновым пучком в  $j$ -й среде и

$$B_j = \frac{n_{j+1}}{n_j} t_{j+1,j}^2, \quad t_{j+1,j} = \frac{\cos \varphi_{j+1}'}{\cos \varphi_j} \quad (32)$$

Величина  $B_j$  может быть названа оператором преломления на плоской границе раздела для варинанса волнового пучка. Зная варинанс падающего пучка и оператор преломления  $B_j$  по формуле ( 31 ) легко определить варинанс пучка в любой среде с плоскими границами раздела между средами при произвольном падении пучка на границу раздела.

Поле волнового пучка в  $j$ -й среде определяется формулой

$$u_m^{(j)}(x_j, z_j) = (d_1 \dots d_{j-1}) \sqrt{\frac{V_j'}{V_j} \left( \frac{V_j^*}{V_j} \right)^2}^{\frac{m}{2}} H_m \left( \sqrt{\frac{k_o n_j V_j'}{|V_j|^2}} x_j \right) \exp \left( -\frac{k_o n_j x_j^2}{2V_j} \right) \times, \quad (33)$$

$$\exp i k_0 (n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots + n_{j-1} l_{j-1} + n_j z_j)$$

Эта формула (33) известным образом приводится к каноническому виду.

Первой средой в формуле (33) считается среда, где расположена горловина падающего волнового пучка, варинанс которого определяется формулой (7). Формулы (31) – (33) являются общими, они позволяют определить параметры волнового пучка в любой последовательности сред с произвольно расположенными границами между ними. При этом предполагается только, что угол падения пучка на любую границу при переходе из оптически более плотной среды в оптически менее плотную всегда меньше угла полного внутреннего отражения. В противном случае возникают затухающие волны и рассмотрение прохождения пучка через систему слоев теряет смысл.

Если гауссов волновой пучок проходит через  $N$  плоскопараллельных слоев с различными показателями преломления, варинанс  $V_{N+1}$  пучка на выходе системы имеет вид

$$V_{N+1} = n_{N+1} A_o t_{N+1,0}^2 + i \left[ \frac{n_{N+1}}{n_o} t_{N+1,0}^2 l_o + \frac{n_{N+1}}{n_1} t_{N+1,1}^2 l_1 + \dots + \frac{n_{N+1}}{n_N} t_{N+1,N}^2 l_N + z_{N+1} \right] \quad (34)$$

Здесь индексом "о" обозначена среда с показателем преломления  $n_o$  перед  $1$  – м слоем, а индексом  $N + 1$  - среда с показателем преломления  $n_{N+1}$  за последним  $N$  - м слоем,  $n_j$  - показатель преломления  $j$  - го слоя,  $l_j$  - геометрическая длина пути, пройденного пучком в  $j$  - м слое,  $\varphi_o$  - угол падения на систему  $N$  плоскопараллельных слоев,  $\varphi_{N+1}$  - угол преломления в среде за  $N$  - м слоем. Параметры  $A_{N+1}$  и  $R_{N+1}$  прошедшего волнового пучка определяются известным образом через варинанс  $V_{N+1}$ . Для определения прошедшего поля многократные отражения от границ слоев можно не учитывать ввиду того, что обычно отражения малы. При определении

отраженного поля амплитуды пучков отраженных от различных слоев соизмеримы и в первом приближении для определения отраженного поля необходимо просуммировать поля волновых пучков, отраженных от каждого слоя с учетом их амплитуд и фаз. Это сделать тем проще, что все эти отраженные волновые пучки в пространстве перед плоскопараллельной слоистой структурой распространяются параллельно друг другу.

Формулы (31) – (34) определяют геометрическую часть прошедшего поля и применимы при углах падения  $\varphi_l$  далеких от угла утечки  $\varphi_p$  вытекающей волны из многослойной структуры и малой угловой расходимости  $\Delta$  падающего пучка, которая должна удовлетворять условию  $\Delta \ll |\varphi_p - \varphi_m|$ , где  $\varphi_m$  - угол утечки ближайший к  $\varphi_p$  другой вытекающей волны.

### 5. Расходимость пучков

Варианс пучка в  $j$  - м слое

$$V_j(z_j) = A_j + iB_j(z_j) = A_j + i[B_j(0) + z_j]$$

Расходимость пучка  $\Theta_j$

$$\Theta_j = \lim_{B_j \rightarrow 0} \frac{\rho_j(z)}{B_j} = \frac{\rho_j(0)}{A_j},$$

где.

$$\rho_j(0) = \sqrt{\frac{2A_j}{k_j}}$$

В итоге

$$\Theta_j = \sqrt{\frac{2}{k_j A_j}} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\pi A_j}} = \sqrt{\frac{\lambda_o}{\pi n_j A_j}}$$

В областях 1, 2 и 3

$$\Theta_1 = \frac{\lambda_o}{\pi n_1 \rho_o}; \quad \Theta_2 = \frac{\lambda_o}{\pi n_2 \rho_o t_{21}}; \quad \Theta_3 = \frac{\lambda_o}{\pi n_3 \rho_o t_{32} t_{21}}$$

Отношение расходимостей

$$1) \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{n_1}{n_2 t_{21}}, \text{ где } t_{21} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}.$$

$$а) \text{ если } n_2 > n_1, \text{ то } \varphi_2 < \varphi_1, \quad t_{21} > 1 \text{ и } \frac{\Theta_2}{\Theta_1} < 1.$$

б) если  $n_2 < n_1$ , то  $\varphi_2 > \varphi_1$ ,  $t_{21} < 1$  и  $\frac{\Theta_2}{\Theta_1} > 1$ .

При переходе в оптически более плотную среду расходимость пучка уменьшается, а при переходе в оптически менее плотную среду – расходимость увеличивается.

$$2) \frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{n_1}{n_3 t_{32} t_{21}}$$

Если слой плоскопараллельный ( $\varphi_2 = \varphi'_2$ )

$$t_{32} t_{21} = \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi'_2} \cdot \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_1} = t_{31}$$

а) Если  $n_3 > n_1$ , то  $\varphi_3 < \varphi_1$ ,  $t_{31} > 1$  и  $\frac{\Theta_3}{\Theta_1} < 1$ .

б) Если  $n_3 < n_1$ , то  $\varphi_3 > \varphi_1$ ,  $t_{31} < 1$  и  $\frac{\Theta_3}{\Theta_1} > 1$ .

в) Если  $n_3 = n_1$ , то  $\varphi_3 = \varphi_1$ ,  $t_{31} = 1$  и  $\frac{\Theta_3}{\Theta_1} = 1$ .

Т. е. при прохождении пучка через плоскопараллельный слой, по обеим сторонам которого одинаковая среда, расходимость пучка не изменяется при любом падении пучка на слой.

### 1.3 Оптика гауссовых пучков в изотропных диэлектриках

Предложен операторный метод записи прошедшего и отраженного полей при падении гауссова пучка на неоднородность, не изменяющую гауссова характера распределения поля. Возможности метода проиллюстрированы на примере прохождения волнового пучка через слоистый диэлектрик со сферическими границами и задачи дифракции пучка на плоской решетке, помещенной между двумя слоями диэлектрика со сферическими границами.

#### 1. Операторы преобразования пучка

Рассмотрим последовательное прохождение гауссова волнового пучка через систему оптических неоднородностей, не изменяющих гауссова характера распределения поля (подобные преобразования пучка называются автомодельными). К таким неоднородностям относятся плоские и сферические границы раздела, плоская густая дифракционная решетка и др. Будем полагать, что каждая оптическая неоднородность разделяет две среды с однородными

параметрами, например,  $j$  - я неоднородность разделяет  $j$ -ю и  $j+1$ -ю среды. Первой средой будем называть среду, в которой лежит горловина волнового пучка падающего на систему. Начало отсчета оси  $o_j z_j$  волнового пучка в первой среде находится в центре горловины. Для произвольной  $j$ -й среды начало отсчета оси  $o_j z_j$  волнового пучка находится на  $j-1$ -й границе раздела в точке пересечения оси пучка с границей. В общем случае каждая среда характеризуется своим показателем преломления  $n_j$ . Будем называть распространение волнового пучка из среды в среду при котором ее номер возрастает (все среды последовательно перенумерованы) прямым, а распространение в стону уменьшения  $j$  ( для отраженных пучков ) обратным.

Для волнового пучка распространяющегося в прямом направлении в  $j$ -м однородном слое поля его описывается формулой

$$U_m^{(j)}(x_j, z_j) = \{a_1 a_2 \cdots a_{j-1}\} \cdot \{\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_{j-1}\} \sqrt{\frac{Re V_j}{V_j(z)}} \left( \frac{V_j^*}{V_j} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times H_m \left( x_j \sqrt{\frac{k_0 n_j Re V_j(z)}{|V_j(z)|^2}} \right) e^{\frac{k_0 n_j x_j^2}{2 V_j(z)}} e^{i k_0 n_j z_j} \quad (1)$$

где  $H_m(x)$  - полиномы Эрмита  $m$  - го порядка,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $a_j$  - амплитудные операторы, описывающие изменение амплитуды при прохождении пучка (или отражении ) через неоднородность,  $\Phi_j = \exp(i k_0 n_j l_j)$  - фазовые операторы, описывающие фазовые набег при прохождении слоя.

Все параметры волнового пучка содержатся в комплексном параметре  $V_j(z_j)$ , называемом вариансом волнового пучка. Представим  $V_j$  в виде

$$\frac{1}{V_j} = \frac{1}{A_j} - i \frac{1}{R_j} \quad (2)$$

Тогда формула (1) приводится к канонической форме записи гауссова волнового пучка

$$u_m^{(j)}(x_j, z_j) = \{a_1 a_2 \cdots a_{j-1}\} \cdot \{\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_{j-1}\} \prod_{j=1}^{j-1} \sqrt{\frac{Re V_j(l_j)}{A_j(l_j)}} \times \\ \times H_m \left( \sqrt{\frac{k_0 n_j}{A_j}} x_j \right) e^{-\frac{k_0 n_j x_j^2}{2 A_j} + i \frac{k_0 n_j x_j^2}{2 R_j}} e^{i k_0 n_j z_j - i \left( m + \frac{1}{2} \right) u_j} \quad (3)$$

где  $\prod_{j=1}^{j-1} \sqrt{\frac{Re V_j(l_j)}{A_j(l_j)}}$  - описывает изменения амплитуды при прохождении  $j-1$  слоя,



$$A_j = (ReV_j)(1 + D_j^2), R_j = (ImV_j)(1 + D_j^{-2}), D_j = \frac{ImV_j}{ReV_j} = tg u_j, \quad (4)$$

$$A_0 = \frac{k_0 \omega_0^2}{2}, A_i = \frac{k_0 n_i \omega_j^2}{2}, ReV_j = n_j A_0, ImV_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{n_j}{n_i} l_i + z_j$$

с начальным условием

$$V_1 = n_1 A_0 + i z_1.$$

Параметр  $A_j$ , называемый шириной пучка, определяет радиус  $w$  пятна поля в сечении  $z_j$

$$A_j = \frac{k_0 n_j w_j^2}{2} \quad (5)$$

величина  $R_j$  является радиусом кривизны волновой поверхности пучка, фаза  $u_j$  варианса  $V_j$  определяет набег фазы пучка вследствие его расширения при распространении.

При прохождении или отражении волнового пучка от неоднородности, не изменяющей гауссового характера распределения поля, изменяются амплитуда и варианс волнового пучка. Для каждой такой неоднородности можно ввести два оператора – оператор амплитуды, описывающий изменение амплитуды при прохождении или отражении от неоднородности и оператор преобразования для варианса. При прохождении однородного участка между неоднородностями амплитуда пучка на оси изменяется по известному закону, а варианс по закону:

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = V_j^+(l_j) + i z_{j+1}, \quad (6)$$

где  $V_j^+(l_j)$  – значение варианса после прохождения  $j$ -й неоднородности, находящейся при  $z_j = l_j$ ,  $V_j^-$  – значение варианса в той же точке перед неоднородностью,  $z_{j+1}$  – координата вдоль направления распространения пучка после прохождения  $j$ -й неоднородности.

Если угловой спектр  $\Delta$  волнового пучка узок (т. е. пучок с малой расходимостью), и угол падения пучка на систему неоднородностей не совпадает с углом излучения  $\Theta_p$  одной из квазисобственных волн, способных распространяться в данной системе и при этом выполняется условие  $\Delta \ll |\Theta_p - \Theta_m|$ , где  $\Theta_m$  – угол излучения, ближайший к  $\Theta_p$  другой квазисобственной волны, то амплитудный оператор для каждой неоднородности представляет собой амплитуду прошедшей (или отраженной) волны, при падении на неоднородность плоской волны единичной амплитуды той же поляризации и падающей под тем же углом, что и исходный волновой пучок. Таким образом, в указанном случае, исключая резонансное падение пучка на систему неоднородностей (если система обладает резонансными по углу падения свойствами) амплитудные операторы  $a_j$  находятся из задачи дифракции плоской волны на соответствующей неоднородности. Случай

резонансного падения с острым угловым резонансом относится к числу преобразований изменяющих гауссовый характер распределения поля и поэтому исключается из рассмотрения. Запись поля в случае резонансного падения отлична от формулы (1) и представляет собой общую интегральную форму записи для волнового пучка.

Введя оператор

$$L_j(z_j) = +iz_j, \quad (7)$$

формулу (6) можно переписать в операторном виде

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = V_j^+(l_j)L_{j+1}(z_{j+1}) \quad (8)$$

Операторы преобразования варианса в отличие от обычной формы записи операторов будем записывать не перед величиной, к которой они применяются, а после нее, причем знак в операторе означает действие, которое выполняет оператор. В случае оператора  $L_j(z_j)$  знак плюс в операторе означает, что указанная в операторе величина должна быть прибавлена к величине, стоящей перед оператором. Оператор  $L_j(z_j)$  является оператором преобразования варианса пучка при прохождении им расстояния  $z_j$ . Аналогично, оператор

$$L_j = +il_j \quad (9)$$

описывает преобразование варианса, при прохождении  $j$ -го слоя ( $l_j$ -путь проходимый пучком в  $j$ -м слое). Одним из простейших операторов преобразования варианса является оператор преобразования при падении волнового пучка на плоскую границу двух изотропных диэлектриков. Преобразование варианса осуществляется по формуле

$$V_j^+ = V_j^- B_j. \quad (10)$$

где оператор преобразования  $B_j$  имеет вид  $[I]$

$$B_j = \times \frac{n_{j+1}}{n_j} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_j'}{\cos^2 \varphi_j} \quad (11)$$

Действие оператора  $B_j$  сводится к умножению варианса падающего пучка на величину, содержащуюся в операторе. Одновременно с оператором  $B_j$  применяется амплитудный оператор  $a_j = d_j$ , где  $d_j$  - амплитудный коэффициент прохождения Френеля. В формуле (11)  $\varphi_j$  - угол падения волнового пучка на  $j$ -ю границу раздела,  $\varphi_j'$  - угол преломления. Конкретный вид амплитудного оператора определяется неоднородностью, на которую падает волновой пучок.

## 2. Оператор преобразования варианса на сферической поверхности раздела двух сред

На практике часто приходится иметь дело со сферическими границами раздела, например, при прохождении волнового пучка через систему линз. Представляет интерес определить оператор преобразования варианса пучка при

его падении на сферическую границу раздела двух сред.

Пусть сферическая поверхность радиуса  $R_c$  разделяет две среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . Пучок падает из среды с показателем преломления  $n$ , угол падения пучка  $\varphi$ , угол преломления  $\varphi'$ . Радиус кривизны волновой поверхности, построенной для точки пересечения оси пучка с границей раздела, для падающего пучка  $R$ , для преломленного  $R'$ . Легко показать, что сферическая граница раздела осуществляет преобразование кривизны волновой поверхности параксиального волнового пучка, описываемое формулой:

$$\frac{n'}{R'} \cos^2 \varphi' - \frac{n}{R} \cos^2 \varphi = \frac{n \cos \varphi - n' \cos \varphi'}{R_c} \quad (12)$$

Радиус сферы в формуле (12) алгебраическая величина. Для выпуклой поверхности (центр кривизны лежит в пространстве изображений)  $R_c > 0$ , для вогнутой поверхности (центр кривизны лежит в пространстве предметов)  $R_c < 0$ . При  $R_c = \infty$  (плоская граница раздела) формула (12) дает результат полностью совпадающей с (11) для преобразования радиуса кривизны пучка на плоской границе раздела.

Для того, чтобы определить оператор преобразования варианса на сферической границе раздела, надо определить еще преобразование ширины пучка  $A$  при переходе сферической границы раздела. Ввиду параксиальности падающего пучка, можно положить, что сферичность границы раздела влияет только на изменение радиуса кривизны волновой поверхности пучка  $R$  и не влияет на его ширину, т. е. параметр пучка  $A$  преобразуется на сферической границе раздела, так же как и на плоской,

$$A' = A \frac{n' \cos^2 \varphi'}{n \cos^2 \varphi} \quad (13)$$

С учетом формул (12), (13) варианс  $V'$  прошедшего пучка связан с вариансом  $V$  падающего пучка на границе раздела соотношением

$$\frac{1}{V'} = \frac{1}{V} \cdot \frac{n}{n't^2} + i \frac{n't - n}{n'tR_c \cos \varphi'}, \quad (14)$$

где параметр

$$t = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \quad (15)$$

В операторной форме формулу (14) можно записать следующим образом

$$(V')^{-1} = (V)^{-1} \cdot B_c^{-1}, \quad (16)$$

где  $B_c^{-1}$ -оператор преобразования варианса на сферической поверхности, определяемый формулой

$$B_c^{-1} = \times \frac{1}{B} + i \frac{n't - n}{n'tR_c \cos \varphi'} \quad (17)$$

Число  $-1$  у оператора (17) означает, что оператор применяется не к самому вариансу, а обратной величине  $V^{-1}$  и в результате получается величина

обратная преобразованному вариансу  $(V')^{-1}$ . Значение знаков умножения и сложения в операторе  $B_c^{-1}$  следующее: сначала величина, к которой применяется оператор, должна быть умножена на оператор, стоящий за знаком умножения, а затем к результату умножения надо прибавить слагаемое, перед которым стоит знак сложения.

Амплитудные операторы при прохождении сферической границы раздела в силу параксиальности падающего волнового пучка могут быть взяты такими же как и для плоской границы раздела двух сред.

Для отраженных волновых пучков в формуле (12) надо положить

$\frac{n'}{n} = -1$ ,  $\varphi' = -\varphi$  и заменить  $R'$  на  $-R'$ . Правило знаков  $R_c$  здесь такое же, как

и для прошедшего пучка. Для плоской границы раздела  $D_c^{-1} = 0$  и  $V' = V$ .

Для гауссовых диафрагм, пропускание которых соответствует закону

$\Psi_{\text{прош}} / \Psi_{\text{пад}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$ , оператор преобразований варианса для прошедшего пучка имеет вид

$$G = +\frac{1}{ka^2}$$

Легко видеть, что гауссова диафрагма эквивалента тонкой линзе с мнимым фокусным расстоянием  $F = ika^2$ . Тонкая линза преобразует кривизну волнового фронта падающих гауссовых пучков, не влияя на их ширину. Гауссова диафрагма действует прямо противоположным образом. Она уменьшает ширину падающих гауссовых пучков, не оказывая влияния на их волновые фронты.

### 3. Прохождение волнового пучка через слоистый диэлектрик со сферическими границами

Границы раздела могут быть как выпуклые ( $R_{cj} > 0$ ) по отношению к падающему на нее пучку, так и вогнутые ( $R_{cj} < 0$ ). Преобразование варианса волнового пучка  $j+1$ -м слоем описывается системой двух уравнений

$$\frac{1}{V_j^+} = \frac{1}{V_j^-} \cdot \frac{n_j}{n_{j+1}t_j^2} + i \frac{n_{j+1}t_j - n_j}{n_{j+1}t_j R_{cj} \cos \varphi'_j} \quad (18)$$

$$V_{j+1}^- = V_j^+ + il_{j+1} \quad (19)$$

или в операторном виде

$$(V_j^+)^{-1} = (V_j^-)^{-1} \cdot B_{cj}^{-1} \quad (20)$$

$$V_{j+1}^- = V_j^+ \cdot L_{j+1} \quad (21)$$

Уравнение (20) описывает преобразование варианса при прохождении  $j$ -й границы раздела, уравнение (21) – при прохождении  $j+1$ -го слоя. Напомним, что при прохождении границы раздела одновременно применяется

амплитудный оператор, а при прохождении слоя – фазовый оператор. Преобразование варианса при прохождении  $j$  границ раздела описывается следующей операторной формулой

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = (V_l^-)^{-1} \cdot B_{c1}^{-1})^{-1} B_{c2}^{-1})^{-1} L_3)^{-1} B_{c3}^{-1} \cdots )^{-1} B_{cj}^{-1})^{-1} L_{j+1}(z_{j+1}), \quad (22)$$

где

$$V_l^- = V_l(0) \cdot L_l(l_l)$$

При записи операторов в строку ввиду того, что оператор  $B_c^{-1}$  применяется не к самому вариансу  $V$ , а к обратной для него величине, все выражение до оператора  $B_c^{-1}$  и после него берется в скобки и возводится в  $-1$ -ю степень (т. е. производится обращение варианса  $V$  до и после оператора  $B_c^{-1}$ ). Количество открывающих скобок в формуле (22) равно количеству закрывающих, для простоты записи все открывающие скобки в (22) заменены одной большой скобкой.

Если слои тонкие, такие, что  $l_{j+1} \ll \text{Im} V_j^+$ , то можно считать, что  $V_{j+1}^- = V_j^+$  и формула (22) преобразуется к виду

$$\frac{1}{V_{j+1}^+} = \frac{1}{V_l^-} \{ B_{c1}^{-1} \cdot B_{c2}^{-1} \cdots B_{cj}^{-1} \} \quad (23)$$

При этом все  $L_j = 0$ .

Рассмотрим частный случай трех сред со сферическими границами между ними. Будем полагать  $n_1 = n_3 = n_0$ , а  $n_2 = n$ , тогда данная система неоднородностей представляет собой толстую линзу, выполненную из вещества с показателем преломления  $n$  и помещенную в среду с показателем преломления  $n_0$  (см. рис.3).

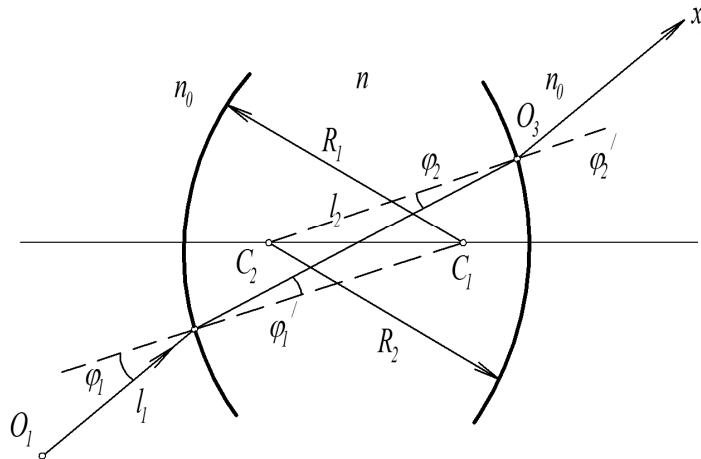


Рисунок 3

Введя систему координат, начало которой расположено в центре горловины, легко определить углы падения и преломления на каждой границе раздела, а также путь  $l_2$  пучка в толстой линзе. Преобразование варианса волнового пучка толстой линзой описывается системой уравнений

$$\frac{1}{V_1^+} = \frac{1}{V_1^-} \frac{n_0}{nt^2} + i \frac{n t_1 - n_0}{n t_1 R_{c1} \cos \phi_1'}, \quad (24)$$

$$V_2^- = V_1^+ + il_2, \quad (25)$$

$$\frac{1}{V_2^+} = \frac{n}{V_2^- n_0 t_2^2} + i \frac{n_0 t_2 - n}{n_0 t_2 R_{c2} \cos \phi_2'}, \quad (26)$$

где

$$t_1 = \frac{\cos \phi_1'}{\cos \phi_1}, \quad t_2 = \frac{\cos \phi_2'}{\cos \phi_2}.$$

При падении волнового пучка вдоль главной оптической оси системы (вдоль прямой, соединяющей центры кривизны сферических поверхностей)  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $\phi_1' = \phi_2' = 0$  и формулы (24) – (26) существенно упрощаются.

В случае тонкой линзы  $l_2 = 0$ , при этом  $V_2^- = V_1^+$  и для пучка, ось которого проходит через центр линзы  $t_1 = t_2^{-1} = \cos \phi_1' / \cos \phi_1 = t$ . Решая систему уравнений (24), (26) получаем

$$\frac{1}{V_2^+} = \frac{1}{V_1^-} + i \frac{n t - n_0}{n_0 \cos \phi_1} \left( \frac{1}{R_{c1}} - \frac{1}{R_{c2}} \right), \quad (27)$$

где  $\phi_1$  - угол между главной оптической осью и осью падающего волнового пучка. При падении вдоль главной оптической оси формула (27) переходит в известную формулу работы [4]

$$\frac{1}{V_2^+} = \frac{1}{V_1^-} + i \frac{1}{F}, \quad (28)$$

где  $F$  - фокусное расстояние тонкой линзы. Таким образом, преобразование варианса волнового пучка при его падении под некоторым углом к главной оптической оси тонкой линзы происходит по более сложному закону по сравнению со случаем падения вдоль главной оптической оси.

#### 4. Дифракция гауссового волнового пучка на плоской решетке, находящейся в диэлектрике со сферическими границами

Проиллюстрируем развитый выше операторный подход на примере задачи дифракции гауссового волнового пучка на плоской решетке, находящейся между двумя слоями диэлектрика со сферическими границами – один с показателем преломления  $n_2$  и радиусом кривизны  $R_1$ , другой с показателем преломления  $n_3$  и радиусом кривизны  $R_3$  (см. рис. 4).

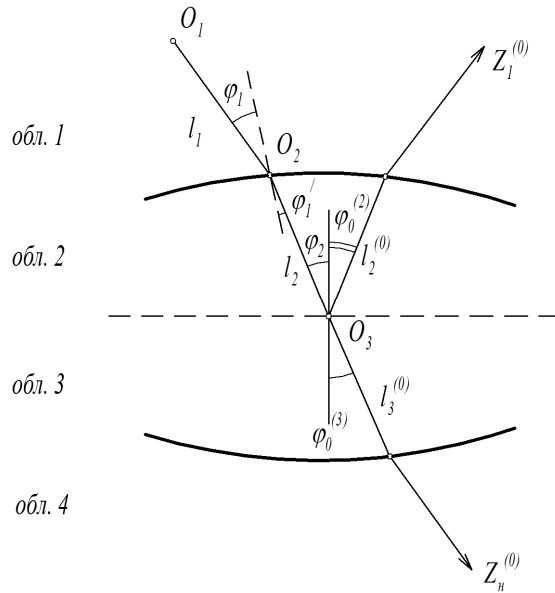


Рисунок 4

Показатели преломления в областях 1 и 4 вне диэлектриков  $n_1 = n_4 = 1$ . Из области 1 на систему падает гауссовый волновой пучок (1), угол падения его на верхний диэлектрик  $\varphi_1$ . Преломленный в верхнем диэлектрике волновой пучок претерпевает дифракцию на решетке. Дифракционное поле в каждой из областей представляет собой бесконечную сумму пространственных гармоник с амплитудными  $a_s^{(2)}$ -в области 2 и  $a_s^{(3)}$ -в области 3. ( $s=0, \pm 1, \pm 2$  - номера пространственных гармоник). Если коэффициенты  $a_s^{(j)}$  определены из задачи дифракции плоской [8] единичной амплитуды и той же поляризации, что и у падающего волнового пучка, то они и являются амплитудными операторами при дифракции пучка на решетке. Гармоники, удовлетворяющие условиям

$$\sin \varphi_s^{(2)} = \sin \varphi_2 + \frac{s}{n_2 k} < 1 \quad (29)$$

$$\sin \varphi_s^{(3)} = \frac{n_2}{n_3} \sin \varphi_2 + \frac{s}{n_3 k} < 1 \quad (30)$$

распространяются от решетки, остальные затухают. В формулах (29), (30)  $\chi = l/\lambda$ ,  $l$  - период решетки,  $\lambda$  - длина волны,  $\varphi_2$  - угол падения волнового пучка на 2-ю неоднородность (ею является решетка),  $\varphi_s^{(2)}$  и  $\varphi_s^{(3)}$  - углы излучения распространяющихся гармоник в областях 2 и 3, отсчитываемые от нормали к решетке.

Каждая распространяющаяся гармоника дифракционного поля представляет собой в случае густой решетки так же гауссовый волновой пучок. Введем операторы преобразования варианта  $s$  - го дифракционного пучка при прохождении слоя диэлектрика

$$L_j^{(s)} = +il_j^{(s)}, \quad (j=2,3), \quad (31)$$

где  $l_j^{(s)}$ -путь проходимый  $s$ -м дифракционным пучком в  $j$ -й среде.

Соответствующий оператору  $L_j^{(s)}$  фазовый оператор имеет вид

$$\Phi_j^{(s)} = e^{ik_0 n_j l_j^{(s)}}$$

Операторы преобразования варианса  $s$ -го дифракционного пучка при его распространении в областях 1 и 4 определяются формулой

$$L_j^{(s)}(z_j^{(s)}) = +iz_j^{(s)}, (j = 1, 4), \quad (32)$$

где  $z_j^{(s)}$  - лучевая координата, совпадающая с осью  $s$ -го дифракционного пучка в  $j$ -й среде.

Решение задачи дифракции волнового пучка на густой решетке, расположенной на границе раздела двух полупространств изотропных диэлектриков с показателями преломления  $n_2$  и  $n_3$ , дает следующее выражение для операторов преобразования варианса падающего пучка в варианс  $s$ -го дифракционного пучка

$$\text{в области 2} \quad A_2^{(s)} = \frac{\cos^2 \varphi_s^{(2)}}{\cos^2 \varphi_2} \quad (33)$$

$$\text{в области 3} \quad A_3^{(s)} = \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_s^{(3)}}{\cos^2 \varphi_2} \quad (34)$$

Тогда варианс  $s$ -го дифракционного пучка прошедшего поля в области 4 в операторной форме запишется в виде

$$V_4^{(s)}(z_4^{(s)}) = [(((A_0 L_1)^{-1} B_{c1}^{-1})^{-1} L_2 A_s^{(3)} L_3^{(s)})^{-1} B_{c3}^{-1}]^{-1} L_4^{(s)}(z_4^{(s)}), \quad (35)$$

где  $A_0$  - ширина пучка в горловине.

Соответствующая преобразованию (35) последовательность амплитудно фазовых операторов в записи поля  $s$ -го дифракционного пучка имеет вид

$$d_1 a_s^{(3)} d_3 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3^{(s)} \quad (36)$$

Для дифракционных пучков отраженного поля распространение будет обратным. Введенные выше операторы, кроме  $A_s^{(2)}$ , соответствуют прямому направлению распространения пучка. Все операторы, соответствующие обратному направлению распространения, будем помечать знаком " $\wedge$ ". При переходе от оператора  $B_j$  и  $B_{cj}^{-1}$  к операторам  $\hat{B}_j$  и  $\hat{B}_{cj}^{-1}$  необходимо в записи операторов поменять местами  $n_{j+1}$  и  $n_j$ , изменить знак у  $R_{cj}$ , и заменить углы  $\varphi_j$  и  $\varphi_j'$ , на  $\hat{\varphi}_j$  и  $\hat{\varphi}_j'$ , т. е. на углы падения и преломления на  $j$ -й границе раздела при обратном ходе. Аналогично будем помечать и амплитудные операторы, фазовые операторы в подобных пометках не нуждаются.

Тогда варианс  $s$ -го дифракционного пучка отраженного поля в области I в операторной форме имеет вид

$$V_I^{(s)}(z_I^{(s)}) = [(((A_0 L_1)^{-1} B_{c1}^{-1})^{-1} L_2 A_s^{(2)} L_2^{(s)})^{-1} B_{c1}^{-1}]^{-1} L_I^{(s)}(z_I^{(s)}) \quad (37)$$

Соответствующая преобразованию (37) для варианса последовательность амплитудно фазовых операторов имеет вид



$$d_1 a_s^{(2)} \hat{d}_1 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_2^{(s)}$$

Одновременно с оператором  $L_j$  применяется и фазовый оператор  $\Phi_j$ . Амплитудные операторы применяются при пересечении границы раздела, т. е. вместе с операторами  $B_j$ ,  $B_{ej}$  и  $A_s^{(j)}$ . Амплитудные операторы могут быть как вещественными, так и комплексными.

Аналогично может быть записано решение задачи дифракции на решетке, помещенной между толстыми или тонкими линзами, и других подобных задач. Полученные операторные формулы имеют обозримый вид, ясное физическое содержание и удобны для программной реализации при расчетах на компьютере. Знание правил преобразования вариантов позволяет легко рассчитать резонансные частоты открытых резонаторов, с гауссовыми функциями распределения поля содержащих диэлектрические пластины, гауссовы диафрагмы, дифракционные решетки, толстые или тонкие линзы.

#### 1.4 Прохождение гауссова пучка через квадратично-неоднородную призму

Показано, что при наклонном падении гауссова пучка на квадратичную среду с произвольно ориентированной осью неоднородности, энергия пучка переносится вдоль оси неоднородности, а фаза – вдоль направления, составляющего некоторый угол с осью переноса энергии. Показано, что при осевом падении, параметры пучка не зависят от угла падения.

Практически часто среда бывает неоднородной. Одним из удобных методов решения задач распространения волн в неоднородных средах является метод аппроксимации функции диэлектрической проницаемости полиномом. Ограничиваясь полиномом второго порядка, приходим к так называемым квадратичным средам, широко используемым для теоретического моделирования реальных неоднородных сред. В данной работе рассматривается прохождение волнового пучка через границу раздела однородного диэлектрика с квадратично-неоднородным диэлектриком при произвольном угле падения пучка и произвольной ориентации оси неоднородности.

##### *1. Прохождение гауссовым пучком однородной призмы*

Сначала рассмотрим прохождение гауссовым пучком однородной призмы с показателем преломления  $n_2$  (область 2) Со стороны падающего пучка находится среда с показателем преломления  $n_1$  (область 1), с другой стороны – с показателем преломления  $n_3$  (область 3). Пучок падает на призму из области 1,  $s_1$  - расстояние от горловины до призмы вдоль осевого луча,  $s_2$  - длина осевого луча в призме.

Поле гауссового волнового пучка в любой из областей ( $j = 1, 2, 3$ ) можно записать в виде

$$u^{(j)} = A_j \Psi_p(x_j, z_j) \exp(i \Phi_j(z_j)), \quad (1)$$

где  $A_j$  - амплитуда, определяющая переносимую пучком энергию,  $(x_j, z_j)$  - лучевые системы координат, центр координат  $O_1$  находится в горловине падающего пучка,  $O_2$  и  $O_3$  - на границах области 2. Функция  $\Phi_j(z_j)$  определяет часть фазы пучка, совпадающую с фазой плоской волны.

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{m=1}^{j-1} k_m s_m + k_j z_j, \quad (2)$$

где  $k_j = n_j k_o$ ,  $k_o = \omega / c$ . Функция  $\Psi_p(x_j, z_j)$  описывает отличие поля пучка от поля плоской волны и имеет вид

$$\Psi_p(x_j, z_j) = \sigma_j(z_j) H_p \left( \sqrt{\frac{k_j}{w_j}} x_j \right) \exp(-k_j x_j^2 / 2V_j + i \phi_j(z_j)), \quad (3)$$

где  $H_p(x)$  - полином Эрмита  $p$ -го порядка.

Величина

$$V_j(z_j) = a_j + i b_j(z_j) \quad (4)$$

называется вариансом пучка и определяет все его параметры. Представляя  $V_j(z_j)$  в виде

$$V_j(z_j) = W_j^{-1} - i R_j^{-1}$$

получаем

$$W_j = \frac{k_j \rho_j^2}{2} = a_j [1 + \beta_j^2(z_j)] \quad (5)$$

$$R_j = b_j [1 + \beta_j^2(z_j)] \quad (6)$$

$$\sigma_j = [1 + \beta_j^2(z_j)]^{\frac{1}{4}}, \quad (7)$$

где величина

$$\beta_j(z_j) = b_j(z_j) / a_j(z_j) \quad (8)$$

называется волновым параметром пучка,  $\rho_j$  - радиус пучка (полуширина) в сечении  $z_j$ ,  $R_j$  - радиус кривизны волновой поверхности, амплитудный коэффициент  $\sigma_j$  описывает уменьшение амплитуды пучка на оси вследствие расплывания его при распространении.

Величина

$$\phi_j(z_j) = \left( p + \frac{1}{2} \right) u_j(z_j) \quad (9)$$

определяет дополнительный фазовый набег, обусловленный кривизной волновой поверхности, где

$$u_j(z_j) = \arctg \beta_j(z_j) \quad (10)$$

- фаза комплексного варианта  $V_j(z_j)$ .

В однородной среде вариантс гауссова пучка описывается формулой

$$V_j(z_j) = V_j(0) + iz_j \quad (11)$$

с начальными значениями

$$V_1(0) = a_1 = \frac{1}{2} k_1 \rho_0^2, \quad b_1 = z_1, \quad \beta_1 = z_1 / a_1, \quad (12)$$

где  $\rho_0$  - радиус пучка в горловине.

Из непрерывности функции  $\Psi_p(x_j, z_j)$  при переходе через границу раздела следует граничное условие для вариантса пучка

$$V_{j+1}(0) = \frac{n_{j+1}}{n_j} V_j(s_j) t_j^2, \quad (13)$$

где

$$t_j = \cos \phi'_j / \cos \phi_j,$$

$\phi_j$  - угол падения в  $j$ -й области,  $\phi'_j$  - угол преломления,  $s_j$  - геометрический путь пучка в  $j$ -й среде. Величина  $t_j$  описывает изменение направления распространения пучка на  $j$ -й границе раздела. Границе раздела между двумя областями присваивается индекс среды с меньшим порядковым номером. Формулу (13) можно рассматривать, как правило преобразования для вариантса гауссова пучка на плоской границе раздела двух однородных сред. С учетом (13), для волнового параметра пучка имеем

$$\beta_{j+1}(z_{j+1}) = \beta_j(s_j) + z_j / a_j \quad (14)$$

Формулы (11), (13) позволяют определить вариантс гауссового пучка и его волновой параметр в любой из областей

$$a_j = (n_j / n_1) a_1 \prod_{m=1}^{j-1} t_m^2 \quad (15)$$

$$b_j(z_j) = n_j \sum_{k=1}^{j-1} (s_k / n_k) \prod_{m=k}^{j-1} t_m^2 + z_j \quad (16)$$

$$\beta_j(z_j) = \sum_{k=1}^{j-1} s_k / a_k + z_j / a_j \quad (17)$$

Формулы (15)-(17) полностью определяют параметры гауссового волнового пучка при его прохождении через многослойную диэлектрическую структуру, состоящую из однородных диэлектриков.

## 2. Прохождение гауссового пучка через квадратично – неоднородную призму

Неоднородность диэлектрической проницаемости области 2 зададим в виде

$$\varepsilon_2(x_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_x \cdot x_2^2, \quad (18)$$

где ось неоднородности  $z_2$  составляет произвольный угол  $\phi'_1$  с нормалью к 1-й границе раздела. Ось неоднородности и ось падающего пучка  $z_1$  пересекаются в одной точке 1-й границы раздела (см. рис.5).

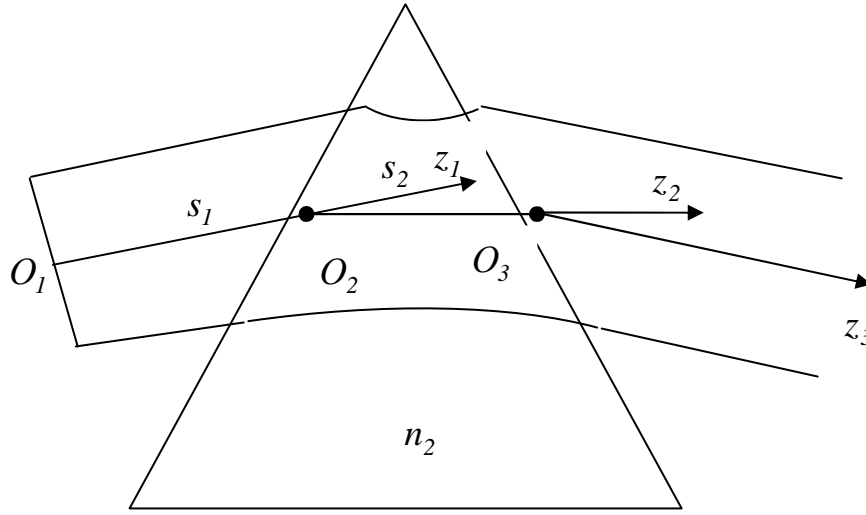


Рисунок 5

Этот случай падения пучка на квадратично-неоднородную среду будем называть наклонным падением без смещения.

В квадратичной среде изменение варинанса пучка описывается формулой

$$V_2(z_2) = \frac{V_2(0) \cos(z_2/V_c) + iV_c \sin(z_2/V_c)}{V_c \cos(z_2/V_c) + iV_2(0) \sin(z_2/V_c)}, \quad (19)$$

где

$$V_c = n_2 / \epsilon_x^{1/2} \quad (20)$$

$$n_2 = \left[ \epsilon_2 - \epsilon_x^{1/2} (2p + 1) / k_0 \right] \quad (21)$$

Показатель преломления (21) является эффективным показателем преломления квадратично-неоднородной среды и именно его надо подставить в (1)-(17) для определения параметров гауссова пучка в квадратичной среде. Значения варинанса на границе  $V_2(0)$  определяется из формулы (13).

Поле (1) в области 2 с варинансом (14) удовлетворяет условию непрерывности функций  $\Psi_p(x_j, z_j)$  на границе раздела. Кроме того для удовлетворения граничным условиям постоянные распространения вдоль границы раздела в двух соседних областях должны быть равны. Когда область 2 однородна, это выполняется автоматически, т. к. углы  $\phi_1$  и  $\phi'_1$  связаны законом преломления. Для квадратично неоднородной среды угол  $\phi'_1$  определяет направление оси неоднородности и поэтому записанные в виде (1) поля не удовлетворяют условию равенства постоянных распространения вдоль 1-й границы раздела. Для того, чтобы это равенство выполнялось надо поле в квадратичной среде, определяемое формулой (1), помножить на  $\exp(ik_2 \delta x_2)$ , где

$$\delta = \frac{n_1 \sin \phi_1 - n_2 \sin \phi'_1}{n_2 \cos \phi'_1}, \quad (22)$$

т. е. поле в квадратичной среде имеет вид

$$u^{(2)} = A_2 \Psi_p(x_2, z_2) \exp[i k_1 s_1 + k_2(z_2 + \delta x_2)] \quad (23)$$

Таким образом, как это обычно и бывает в анизотропных средах, направления волновой и лучевой нормалей гауссова пучка при его наклонном падении не совпадают. Лучевая нормаль, вдоль которой переносится энергия, совпадает с осью неоднородности, а волновая нормаль, вдоль которой распространяется фаза пучка, составляет с осью неоднородности угол  $\alpha = \operatorname{tg} \delta$ . При  $\varepsilon_x = 0$  область 2 однородна,  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ , угол  $\phi'_1$  становится углом преломления волнового пучка, а параметр  $\delta = 0$ .

Амплитуда отраженного и преломленного волновых пучков определяется формулами для коэффициентов Френеля с  $n_2$  по формуле (21).

Для прозрачных квадратичных сред  $V_c$  - вещественная величина и представляя ее в виде

$$V_c = k_2 \rho_c^2 / 2, \quad (24)$$

где  $\rho_c$  - радиус пучка собственной моды квадратичной среды, для параметров волнового пучка в области 2 получим

$$a_2 = (n_2 / n_1) a_1 D(z_2) t_1^2, \quad (25)$$

$$b_2(z_2) = a_2(z_2) \beta_2(z_2), \quad (26)$$

$$\beta_2(z_2) = \frac{1}{2} \mu^2 \mu - \sin(2z_2 / V_c) + \beta_1(s_1) \cos(2z_2 / V_c) \quad (27)$$

$$D(z_2) = [1 + \beta_1^2(s_1)] \left\{ \cos^2(z_2 / V_c) + [\mu^2 \sin^2(z_2 / V_c) - \beta_1(s_1) \cos(z_2 / V_c)]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (28)$$

$$\mu = \xi [1 + \beta_1^2(s_1)]^{1/2} t_1, \quad \mu_{\pm} = \mu^{-1} [1 + \beta_1^2(s_1)] \pm 1 \quad (29)$$

Наиболее существенным параметром в (25)-(29) является

$$\xi = \rho_o / \rho_c, \quad (30)$$

который определяет соотношение между радиусом  $\rho_o$  падающего пучка в горловине и радиусом  $\rho_c$  собственной моды квадратичной среды. Параметр

$$\mu = \rho_2(0) / \rho_c, \quad (31)$$

где

$$\rho_2(0) = \rho_o [1 + \beta_1^2(s_1)]^{1/2} t_1 \quad (32)$$

определяет соотношение между радиусом пучка  $\rho_2(0)$  на входе в квадратичную среду и радиусом  $\rho_c$  собственной ее моды. Формула (27) определяет волновой параметр пучка в квадратичной среде. При  $\rho_c \rightarrow \infty$  (однородная среда) формула (27) переходит в (14),  $D(z_2) = 1$ , а формулы (25), (26) переходят в (15), (16) соответственно.

Для удобства анализа целесообразно величины  $V_c$  и  $n_2$  выразить через  $\xi$

$$V_c = n_2 a_o / \xi^2 \quad (33)$$

$$n_2 = \left[ \varepsilon_2 - \frac{2\rho + 1}{k_o a_o} \xi^2 \right]^{1/2}, \quad (34)$$

где  $a_o = k_o \rho_o^2 / 2$ . Тогда можно провести анализ поля пучка как функции параметра  $\xi$ .

Радиус пучка в квадратичной среде находится из (5), в результате получаем

$$\rho_2^2(z_2) = \rho_2^2(0) D(z_2), \quad (35)$$

а для радиуса кривизны волновой поверхности пучка

$$R_2(z_2) = \frac{k_2 \rho_2^2(z_2)}{2 \beta_2(z_2)} = \frac{W_2(z_2)}{\beta_2(z_2)} \quad (36)$$

Подстановка (27), (28) в (35) и последующие преобразования приводит к окончательной формуле для радиуса пучка в квадратичной среде

$$\rho_2^2(z_2) = \rho_2^2(0) \left[ 1 + \mu - \sin^2(z_2 / V_c) + \mu^{-2} \beta_1(s_1) \sin(2z_2 / V_c) \right] \quad (37)$$

Как видно из (37) радиус пучка в квадратичной среде при наклонном падении пучка на границу раздела изменяется с периодом

$$L = \frac{1}{2} \pi k_o n_2 \rho_c^2 \quad (38)$$

таким же, как и в случае нормального падения пучка, нормального направления оси неоднородности и расположения горловины на границе раздела. Таким образом, период изменений радиуса пучка в квадратичной среде определяется только радиусом  $\rho_c$  собственной моды квадратичного диэлектрика, эффективным показателем преломления  $n_2$  квадратичной среды, частотой  $k_o$  и не зависит от положения горловины падающего пучка, угла падения и ориентации оси неоднородности.

При осевом падении пучка на границу раздела (падающий пучок распространяется вдоль оси неоднородности)  $\phi_1 = \phi'_1, t_1 = 1$  и параметры волнового пучка в квадратичной среде не зависят от угла падения. От угла падения при этом зависят только коэффициенты отражения и прохождения.

Осцилляции радиуса пучка в квадратичной среде носят сложный характер и существенно зависят от расположения горловины падающего пучка. Если горловина лежит на границе раздела ( $\beta_1 = 0$ ) осцилляции радиуса пучка носят квадратично синусоидальный характер ( $\sim \sin^2(z_2 / V_c)$ ). При  $\mu_- = 0$  (т.е.  $\mu^4 = 1 + \beta_1^2(s_1)$ ) осцилляции пучка носят чисто синусоидальный характер ( $\sim \sin(2z_2 / V_c)$ ). В общем случае осцилляции радиуса пучка представляют собой наложение этих двух видов осцилляций. Таким образом, квадратичная среда канализирует падающий пучок, заставляя его распространяться вдоль оси неоднородности, при этом параметры пучка периодически изменяются.

Радиус пучка  $\rho_2$  с периодом  $L$  колеблется между двумя экстремальными значениями

$$\rho_{2\pm}^2 = \frac{1}{2} \rho_2^2(0) \left[ \mu_+ \pm \sqrt{\mu_-^2 + 4\mu_-^4 \beta_1^2(s_1)} \right], \quad (39)$$

которые зависят от расположения горловины, угла падения и ориентации оси неоднородности. Радиус кривизны волновой поверхности в сечениях с

экстремальными радиусами пучка обращается в бесконечность (волновые поверхности плоские).

В области 3 (за квадратичным слоем) параметры  $a_3$  и  $b_3$  принимают значения

$$a_3 = \frac{n_3}{n_2} a_2 (s_2) t_2^2, \quad b_3(z_3) = a_3 \beta_2(s_2) + z_3, \quad (40)$$

где  $s_2$  - длина пути пучка в квадратичном слое, измеренная вдоль оси неоднородности,  $t_2 = \cos \varphi'_2 / \cos \varphi_2$ ,  $\varphi_2$  - угол, который составляет ось неоднородности с нормалью ко 2 – й границе раздела,  $\varphi'_2$  - угол преломления на 2 – й границе раздела. Угол преломления  $\varphi'_2$  для пучка прошедшего квадратичный слой определяется из равенства постоянных распространения вдоль 2 – й границы раздела

$$n_3 \sin \varphi'_2 = n_2 (\sin \varphi_2 + \delta \cos \varphi_2) \quad (41)$$

Для плоскопараллельного квадратичного слоя  $\varphi'_1 = \varphi_2$  и из (41)  $n_3 \sin \varphi'_2 = n_1 \sin \varphi_1$ , т. е. угол преломления  $\varphi'_2$  после квадратичного слоя такой же как и для однородного плоскопараллельного слоя и если  $n_3 = n_1$ , то  $\varphi'_2 = \varphi_1$ , т. е. прошедший плоскопараллельный квадратичный слой волновой пучок распространяется параллельно падающему.

Если  $b_3(0) \neq 0$ , то за квадратичным слоем образуется горловина в сечении с координатой

$$z_3 = -a_3 \beta_2(s_2) \quad (42)$$

При этом фокусирующее действие квадратичного слоя столь велико, что приводит к образованию горловины за слоем, аналогично тому, как это бывает при прохождении пучка через собирающую линзу с большой оптической силой.

Расходимость  $\Theta$  пучка в каждой из областей ( $j = 1, 2, 3$ ) определяется формулой

$$\Theta_j = (2 / k_j a_j)^{1/2} \quad (43)$$

Изменение расходимости пучка, прошедшего квадратичный слой, равно

$$\Theta_3 / \Theta_1 = (n_1 / n_2 t_2 t_1) (D(s_2))^{-1/2} \quad (44)$$

Для однородного слоя  $D(s_2) = 1$ . Следовательно, физический смысл параметра  $D(s_2)$  состоит в том, что он описывает влияние неоднородности среды на изменение расходимости пучка. Ввиду того, что  $D(s_2)$  периодическая функция толщины  $s_2$  квадратичного слоя, то и расходимость прошедшего пучка периодически изменяется с увеличением толщины  $s_2$ .

В заключении отметим, что, зная параметры волнового пучка, прошедшего квадратичный слой, можно рассчитать параметры открытого резонатора со сферическими зеркалами, содержащим слой квадратичного диэлектрика.

## 1.5 Преломление гауссового волнового пучка плоской границей одноосного кристалла

Выше рассмотрено преломление гауссового волнового пучка на границе раздела вакуум - изотропный диэлектрик. Преломление пучка на границе изотропный диэлектрик – одноосный кристалл имеет ряд специфических особенностей, связанных тем, что направление распространения фазы (волновой нормали) и энергии (луча) в необыкновенной волне не совпадают.

Пусть на плоскую границу  $z=0$  одноосного кристалла, заполняющего полупространство  $z>0$ , падает под углом  $\alpha_{1,0}$  гауссовый волновой пучок с поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}_I(x_I, z_I) = & \vec{E}_I(n_I A_o / A_I)^{1/4} H_m(\sqrt{k_o n_I / A_I} x_I) \times \\ & \times \exp[-k_o n_I x_I^2 / 2V_I] \exp\left\{i\left[k_o n_I z_I - \left(m + \frac{1}{2}\right)u_I\right]\right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Волновой пучок (1) распространяется в однородном изотропном диэлектрике с показателем преломления  $n_I$ , заполняющим полупространство  $z<0$  (см. рис. 6).

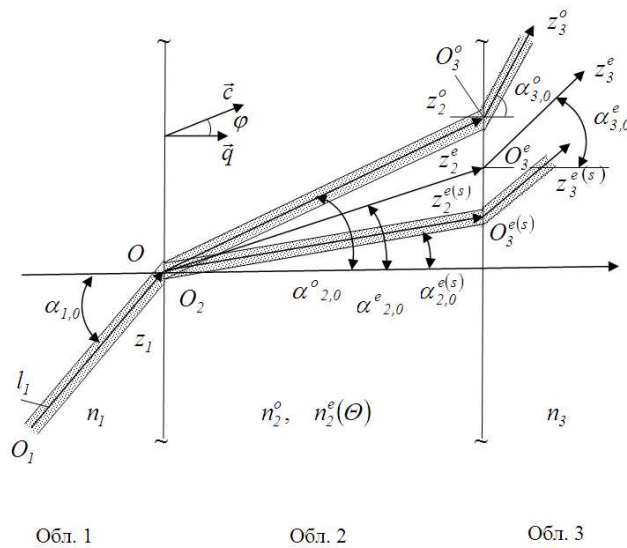


Рисунок 6

Относительно кристалла известно положение его оптической оси, которая составляет угол  $\varphi$  с нормалью  $\vec{q}$  к границе раздела, и главные значения  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$  тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_o + (\varepsilon_e - \varepsilon_o)\vec{c} \cdot \vec{c}$ . Система координат  $(x_I, z_I)$  связана с пучком, ось  $z_I$  направлена вдоль оси падающего волнового пучка, начало ее находится в горловине пучка. Расстояние от горловины падающего пучка вдоль оси до точки ее пересечения с поверхностью кристалла -  $l_I$ . В формуле (1)  $H_m(x)$ -полином Эрмита  $m$ -го порядка,  $k_o = \omega / c$ ,  $c$  - скорость света в вакууме.

Все геометрические и частично фазовые параметры гауссового волнового пучка в неявном виде содержатся в комплексном параметре



$$V_I(z_I) = n_I A_0 + iz_I \quad (2)$$

называемом вариансом волнового пучка,

$$A_0 = k_o \varpi_o^2 / 2;$$

$$A_I = k_o n_I \varpi^2 / 2 = (Re V_I) (1 + D_I^2);$$

$$R_I = (Im V_I) (1 + D_I^{-2})$$

$$D_I = tg u_I = (Im V_I) / Re V_I,$$

где  $\varpi_o$  - радиус пятна поля пучка в горловине,  $R$ - радиус кривизны волновой поверхности пучка,  $u_I$  - дополнительный фазовый набег пучка вследствие его расплывания при распространении.

Поле (1) является квазиоптическим приближением поля

$$\vec{E}_I(x_I, z_I) = \vec{E}_I \frac{k_o n_I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m(\xi_I) \exp \left[ ik_o n_I \left( \xi_I x_I + \sqrt{1 - \xi_I^2} z_I \right) \right] d\xi_I,$$

где

$$F_m(\xi_I) = (2\pi A_o / k_o)^{1/2} (-i)^m \exp(-k_o n_I^2 A_o \xi_I^2 / 2) \times \\ \times H_m(n_I \sqrt{k_o A_o} \xi_I)$$

$F_m(\xi_I)$  - Фурье – преобразование функции распределения поля падающего пучка в горловине  $z_I = 0$ ,  $\xi_I = \sin \beta_I$ .

Формула (3) представляет собой разложение поля падающего волнового пучка (1) в интеграл Фурье по плоским волнам,  $\beta_I$  - углы, которые составляют волновые векторы  $\vec{k}_I = k_o n_I \vec{n}_I$  этих волн с осью пучка  $z_I$ ,  $\vec{n}_I$  - единичные волновые нормали плоских волн.

Углы падения плоских волн на поверхность кристалла  $\alpha_I = \alpha_{I,o} + \beta_I$ .

Здесь и далее первые нижние индексы у параметров волновых пучков указывают область пространства, второй нижний индекс 0 означает, что данная величина относится к плоской волне, распространяющейся вдоль оси волнового пучка (осевая волна), верхние индексы – тип волны.

Для получения квазиоптического приближения в формуле (3) необходимо разложить  $\sqrt{1 - \xi_I^2}$  с точностью до квадратичных членов и аналитически свернуть полученный интеграл. В результате получаем формулу (1).

Вследствие анизотропии в одноосном кристалле возникают два преломленных пучка – обыкновенный  $\vec{E}_2^0$  и необыкновенный  $\vec{E}_2^e$ , определяемые формулой:

$$\vec{E}_2^j(x_2^j, z_2^j) = \frac{k_o n_I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_2^j(\xi_I) L_I(\xi_I) \times \\ \times \exp \left[ ik_o n_2^j \left( \xi_2^j x_2^j + \sqrt{1 - (\xi_2^j)^2} z_2^j \right) \right] d\xi_I, \quad (4)$$

где

$$j=0,e; L_1(\xi_1)=\exp ik_0 n_1 \sqrt{1-\xi_1^2} l_1;$$

$$n_2^o = \sqrt{\varepsilon_o}; n_2^e = n_2^e(\Theta) = [\varepsilon_o \varepsilon_e / (\varepsilon_o \sin^2 \Theta + \varepsilon_e \cos^2 \Theta)]^{1/2};$$

$$\xi_2^j = \sin \beta_2^j;$$

$\beta_2^j$  - углы, которые составляют волновые векторы  $\vec{k}_2^j = k_0 n_2^j \vec{n}_2^j$  плоских волн в разложении (4) поля преломленных пучков по плоским волнам с осями  $z_2^j$ , совпадающими с осями преломленных пучков;  $\Theta$  - угол между волновым вектором  $\vec{k}_2^e$  и оптической осью кристалла, он является функцией переменной интегрирования  $\xi_1$ . Сомножитель  $L_1(\xi_1)$  описывает расплывание пучка на пути  $l_1$ .

Углы преломления  $\alpha_2^j$  плоских волн в разложении (4) определяются формулой  $\alpha_2^j = \alpha_{2,0}^j + \beta_2^j$ , где  $\alpha_{2,0}^j$  углы преломления плоских волн с волновыми векторами  $\vec{k}_{2,0}^j$ , совпадающими с осями волновых пучков.

Используя законы преломления

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2^j \sin \alpha_2^j, n_1 \sin \alpha_{1,0} = n_2^j \sin \alpha_{2,0}^j \quad (5)$$

легко получить

$$\xi_2^j = (n_1 / n_2^j) t_{12}^j \xi_1 + O(\xi_1^2), \quad (6)$$

где

$$t_{12}^j = \cos \alpha_{1,0} / \cos \alpha_{2,0}^j \quad (7)$$

$n_2^e = n_2^e(\Theta_o)$ ;  $\Theta_o$  - угол между оптической осью и волновым вектором  $\vec{k}_{2,0}^e$  - необыкновенного пучка, совпадающим с его осью. Замена местами нижних индексов у  $t_{\alpha\beta}^j$  в дальнейшем будет означать замену местами числителя и знаменателя в формуле (7).

Амплитуды отраженного и преломленных волновых пучков совпадают с аналогичными для плоских волн, их определение дано в [9].

В обыкновенном волновом пучке волновая нормаль  $\vec{n}_{2,0}^o$  осевой волны совпадает с лучевым вектором  $\vec{s}_{2,0}^o$  этой волны. В необыкновенном пучке волновая нормаль  $\vec{n}_{2,0}^e$  осевой волны и лучевой вектор  $\vec{s}_{2,0}^e$  не совпадают по направлению. В общем случае, когда оптическая ось не лежит в плоскости падения, лучевой вектор  $\vec{s}_{2,0}^e$ , вдоль которого осуществляется перенос энергии в пучке, также не лежит в плоскости падения. В приложениях широко используется случай, когда оптическая ось лежит в плоскости падения (главная плоскость падения). В главной плоскости падения показатель преломления для необыкновенных волн изменяется с направлением в максимальных пределах. При этом луч лежит в этой же плоскости и угол  $\delta$  между волновой нормалью  $\vec{n}_{2,0}^e$  и лучом  $\vec{s}_{2,0}^e$  определяется формулой

$$tg \delta = \pm \frac{|\varepsilon_e - \varepsilon_o| tg \mu}{\varepsilon_e + \varepsilon_o tg^2 \mu}, \quad (8)$$

где  $\mu$  - угол между векторами  $\vec{n}^e$  и  $\vec{c}$ .

При этом в формуле (8) знак  $+$  берется тогда, когда вектор  $\vec{s}^e$  лежит между  $\vec{n}^e$  и нормалью  $\vec{q}$  к поверхности [9].

В формуле (4) введены две системы координат  $(x_2^j, z_2^j)$ , у которых оси  $z_2^j$  направлены вдоль волновых векторов  $\vec{k}_{2,0}^j$  (вдоль осей волновых пучков), а начало координат  $O_2^j$  находится на границе раздела. В дальнейшем систему координат, у которой ось  $z$  направлена вдоль волнового вектора, будем называть волновой, а систему с осью  $z$  вдоль луча  $\vec{s}_{2,0}^e$  - лучевой.

Направление оси волнового пучка должно совпадать с направлением потока энергии. Значение координаты  $x_2^j = 0$  в формуле (4) определяет положение энергетического центра пучка. Для обыкновенного волнового пучка ось  $x_2^o \perp \vec{s}_{2,0}^o$  и значение  $x_2^o = 0$  правильно описывает положение энергетического центра обыкновенного пучка при любой координате  $z_2^o$  (т. е. перенос энергии осуществляется вдоль  $z_2^o$ ). Для необыкновенного волнового пучка ось  $x_2^e$  не перпендикулярна  $\vec{s}_{2,0}^e$  и поэтому от координатной оси  $x_2^e$  надо перейти к оси  $x_2^{e(s)} \perp \vec{s}_{2,0}^e$ , т. е. от прямоугольной волновой системы координат  $(x_2^e, z_2^e)$  надо перейти в косоугольную волново-лучевую  $(x_2^{e(s)}, z_2^e)$ , у которой

$$x_2^{e(s)} = x_2^e \cos \delta - z_2^e \sin \delta \quad (9)$$

Для пучков со слабой расходимостью функция  $F_m(\xi_l)$  имеет острый локальный максимум в окрестности  $\xi_l = 0$  и поэтому при подстановке (9) в (4) можно пренебречь  $\xi_2^e tg \delta$  по сравнению с  $\sqrt{1 - (\xi_2^e)^2}$  (для всех кристаллов  $tg \delta \ll 1$ ). В результате для необыкновенного пучка получаем

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^e(x_2^e, z_2^e) = & \frac{k_o n_l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_2^e(\xi_l) F_m(\xi_l) L_l(\xi_l) \times \\ & \times \exp\left\{ik_o n_2^e(\Theta) \left[ \xi_2^e x_2^{e(s)} / \cos \delta + \sqrt{1 - (\xi_2^e)^2} z_2^e \right] \right\} d\xi_l \end{aligned} \quad (10)$$

Сворачивая интеграл (4) для обыкновенного пучка и (10) - для необыкновенного в квазиоптическом приближении окончательно получаем

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^j(\bar{x}_2^j, \bar{z}_2^j) = & \vec{E}_2^j(n_2^j A_o / A_2^j)^{1/4} H_m\left(\sqrt{k_o n_2^j / A_2^j} \bar{x}_2^j\right) \times \\ & \times \exp\left[-k_o n_2^j (\bar{x}_2^j)^2 / 2V_2^j\right] \exp\left\{i\left[k_o n_2^j z_2^j - \left(m + \frac{1}{2}\right)u_2^j\right]\right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^o = x_2^o, \quad \bar{x}_2^e = x_2^e - z_2^e tg \delta, \quad (A_2^j)^{-1} = Re(V_2^j)^{-1}, \\ V_2^j(z_2^j) = V_2^j(0) + iz_2^j; \quad V_2^j(0) = n_2^j A_o (t_{21}^j)^2 + i(n_2^j / n_l) (t_{21}^j)^2 l_l \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом в необыкновенном волновом пучке фаза распространяется вдоль волновой нормали (вдоль оси  $z_2^e$ ), а энергия – вдоль прямой  $x_2^e = z_2^e \tan \delta$ , т. е. вдоль луча. Изменение варианса пучка (12) определяется изменением фазы, поэтому он зависит от волновой координаты  $z_2^e$ , а не от лучевой.

Формула (11) для необыкновенного волнового пучка полностью совпадает с аналогичной формулой работы [10], в которой она получена из решения дифференциального параболического уравнения. Однако, если в [10] эта формула получена для пространства полностью заполненного кристаллом, то в данной работе – для граничной задачи, для полупространства заполненного кристаллом при преломлении им падающего на границу раздела волнового пучка. Это позволяет получить алгоритм преобразования варианса пучка  $V$  при переходе через границу раздела с анизотропной средой. Сравнивая формулы (2) для  $V_1(l_1)$  и (12) для  $V_2^j(0)$  можно записать

$$V_2^j(0) = B_l^j V_1(l_1), \quad (13)$$

где  $B_l^j$  - операторы преобразования вариансов пучков при переходе через границу раздела из 1-й среды во 2-ю, определяемые формулой

$$B_l^j = (n_2^j / n_1) (t_{21}^j)^2 \quad (14)$$

Если кристалл занимает не все полупространство  $z > 0$ , а только его часть и ограничен плоской поверхностью (2-я граница раздела), за которой располагается изотропная среда с показателем преломления  $n_3$ , то поле прошедших волновых пучков в области 3 определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{E}_3^o(x_3^j, z_3^j) = & \frac{k_o n_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_2^j(\xi_2^j) F_m(\xi_1) L_1(\xi_1) L_2^j(\xi_2^j) \times \\ & \times \exp \left[ ik_o n_3 \left( \xi_3^j x_3^j + \sqrt{1 - (\xi_3^j)^2} z_3^j \right) \right] d\xi_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где сомножитель  $L_2^j(\xi_2^j) = \exp \left[ ik_o n_2^j \sqrt{1 - (\xi_2^j)^2} l_2^j \right]$  описывает распывание (дифракцию) пучков на пути  $l_2^j$ ;  $l_2^j$  - расстояние вдоль волновых нормалей  $\vec{n}_{2,0}^j$  (вдоль осей пучков  $z_2^j$ ) от первой границы раздела до второй;  $\xi_3^j = \sin \beta_3^j$ ;  $\beta_3^j$  - углы, которые составляют волновые векторы  $\vec{k}_3^j = k_o n_3 \vec{n}_3^j$  плоских волн в (15) с осями  $z_3^j$ . Направление осей  $z_3^j$  волновой системы координат совпадает с направлением волновых векторов  $\vec{k}_{3,0}^j$  и определяется из законов преломления на второй границе раздела

$$n_2^j \sin \bar{\alpha}_2^j = n_3 \sin \alpha_3^j; \quad n_2^j \sin \bar{\alpha}_{2,0}^j = n_3 \sin \alpha_{3,0}^j \quad (16)$$

откуда

$$\xi_3^j = (n_2^j / n_3) t_{23}^j \xi_2 = (n_1 / n_3) t_{12}^j t_{23}^j \xi_1 + O(\xi_1^2),$$

где  $t_{23}^j = \cos \bar{\alpha}_{2,0}^j / \cos \alpha_{3,0}^j$ ;  $\bar{\alpha}_{2,0}^j$  - угол падения осевой волны на вторую границу раздела. В случае, если границы параллельны  $t_{12}^j t_{23}^j = t_{13}^j = \cos \alpha_{1,0} / \cos \alpha_{3,0}^j$ .

В изотропной среде за слоем кристалла  $\vec{n}_{3,0}^e \parallel \vec{s}_{3,0}^e$  и поэтому ось  $z_3^e$  параллельна оси  $z_3^{e(s)}$ . Законы преломления (16) дают, что ось прошедшего необыкновенного волнового пучка в области 3 совпадает с  $z_3^e$ , но они не учитывают направление потока энергии, а энергетический центр этого пучка распространяется вдоль оси  $z_3^{e(s)} \parallel z_3^e$  (см. рис.1). Поэтому, вследствие параллельности этих осей, в формуле (15) для необыкновенного волнового пучка ( $j=e$ ) надо сделать замену  $z_3^e \rightarrow z_3^{e(s)}$  и  $x_3^e \rightarrow x_3^{e(s)}$ , т. е. перейти от волновой в лучевую систему координат. На фазах этот переход никоим образом не сказывается, но он дает правильное положение энергетического центра пучка. В результате получаем

$$\begin{aligned} \bar{E}_3^j(\bar{x}_3^j, \bar{z}_3^j) = & \bar{E}_3^j(n_3 A_o / A_3^j)^{1/4} H_m\left(\sqrt{k_o n_3^j / A_3^j} \bar{x}_3^j\right) \times \\ & \times \exp\left[-k_o n_3^j (\bar{x}_3^j)^2 / 2V_3^j\right] \exp\left\{i\left[k_o n_3^j \bar{z}_3^j - \left(m + \frac{1}{2}\right)u_3^j\right]\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_3^o &= x_3^o, \bar{z}_3^o = z_3^o; \bar{x}_3^e = x_3^{e(s)}, \bar{z}_3^e = z_3^{e(s)}; \\ (A_3^j)^{-1} &= Re(V_3^j)^{-1}, \\ V_3^j(\bar{z}_3^j) &= V_3^j(0) + i\bar{z}_3^j; \\ V_3^j(0) &= n_3^j A_o (t_{31}^j t_{21}^j)^2 + i\left[(n_3 / n_1)(t_{32}^j t_{21}^j)^2 l_1 + (n_3 / n_2^j)(t_{32}^j)^2 l_2^j\right] \end{aligned} \quad (18)$$

Если границы параллельны  $t_{32}^j t_{21}^j = t_{31}^j$ . Сравнивая формулу (18) для  $V_3^j(0)$  с формулой (12) для  $V_2^j(l_2^j)$  можно записать

$$V_3^j(0) = B_2^j V_2^j(l_2^j), \quad (19)$$

где  $B_2^j$  - оператор преобразования варiances волнового пучка на второй границе раздела, определяемый формулой

$$B_2^j = (n_3 / n_2^j) (t_{32}^j)^2 \quad (20)$$

Данный проход позволяет легко определить структуру поля волнового пучка при прохождении им произвольной слоистой структуры с плоскими границами раздела, составленной из слоев изотропных диэлектриков и слоев одноосных кристаллов. На  $k$ -й границе раздела преобразование варiances пучка осуществляется по правилу

$$\begin{aligned} V_{k+1}^j(0) &= B_k^j V_k^j(l_k^j), \quad B_k^j = (n_{k+1}^j / n_k^j) (t_{k+1,k}^j)^2, \\ V_{k+1}^j(l_{k+1}^j) &= V_{k+1}^j(0) + i l_{k+1}^j. \end{aligned}$$

где  $l_k^j$  - расстояние между  $k-1$ -ой и  $k$ -ой границами раздела, измеренное вдоль волновой координаты  $z_k^j$ .

Знание структуры поля волновых пучков, прошедших слой анизотропного диэлектрика, необходимо для описания поля в открытых резонаторах с анизотропными диэлектриками.

## 1.6 Распространение гауссового волнового пучка в слоистой нелинейной среде с плоскими границами раздела

Определены параметры аксиально-симметричного гауссового волнового пучка при его распространении в слоистой кубично нелинейной среде с плоскими границами. Сформулированы граничные условия для пучка на границе раздела двух нелинейных сред.

Известно дифференциальное уравнение, описывающее поведение безразмерного радиуса аксиально-симметричного волнового пучка в однородной кубично нелинейной среде [5]. Для решения задачи распространения волнового пучка в слоистой нелинейной среде с плоскими границами необходимо сформулировать граничные условия на границе раздела для безразмерного радиуса пучка.

При распространении аксиально симметричного гауссового волнового пучка в слоистой линейной среде с плоскими границами раздела между слоями поле пучка в  $j$ -ом слое описывается формулой

$$E_j = E_o \sqrt{\frac{V_j'}{A_j}} \exp \left( -\frac{k_o n_j r_j^2}{2A_j} + i \frac{k_j n_j r_j^2}{2R_j} - i u_j + i k_o n_j z_j \right), \quad (1)$$

где  $k_o = \frac{\omega}{c}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  - номер слоя,  $n_j$  - показатель преломления  $j$ -го слоя.

Все слои последовательно перенумерованы, индекс  $j=1$  присвоен слою, где расположена горловина пучка. Границам раздела присваивается номер среды, из которой падает на нее волновой пучок. Границы раздела параллельны друг другу и пучок распространяется перпендикулярно границам.

Параметр  $A_j$  определяет радиус  $\rho_j$  пятна поля пучка

$$A_j = \frac{k_o n_j \rho_j^2}{2} \quad (2)$$

Параметр  $R_j$  является радиусом кривизны волновой поверхности пучка;  $z_j$  и  $r_j$  - координаты цилиндрической системы координат, ось  $z_j$  которой совпадает с осью пучка в  $j$ -ом слое и начало которой лежит на входной поверхности слоя.

Параметры пучка  $A_j$  и  $R_j$  содержатся в обобщенном параметре  $V_j = V_j' + iV_j''$ , называемом вариансом волнового пучка [4]

$$V_j^{-1} = A_j^{-1} - iR_j^{-1} \quad (3)$$

параметр  $u_j = \arctg V_j''/V_j'$ , входящий в формулу (1), определяет фазу варианса  $V_j$ .

Вариансы волновых пучков в двух соседних слоях линейной среды связаны соотношением

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = V_j(l_j) \cdot B_j + i z_{j+1}, \quad (4)$$

где

$$B_j = \frac{n_{j+1}}{n_j} \quad (5)$$

$l_j$  - геометрический путь, пройденный пучком в  $j$ -ом слое. Величина  $B_j$ , определяемая формулой (5), может быть названа оператором преобразования для варiances волнового пучка на границе раздела.

Из формулы (4) следует

$$V'_j = n_j A_0 \quad (6)$$

$$V''_j = \sum_{m=1}^{j-1} \frac{n_j}{n_m} l_m + z_j \quad (7)$$

где  $A_0 = k_0 n_1 \rho_0^2 / 2$ ,  $\rho_0$  - радиус пятна поля в горловине. Из формулы (3) с учетом (6),(7) для параметра  $A_j$  получаем

$$A_j = n_j A_0 f_{lj}^2 \quad (8)$$

где

$$f_{lj}^2 = 1 + \left( \frac{V''_j}{V'_j} \right)^2 = 1 + \left( \sum_{m=1}^{j-1} \frac{l_m}{V'_m} + \frac{z_j}{V'_j} \right)^2 \quad (9)$$

Из формул (2),(9) видно, что величина  $f_{lj}$  является безразмерным радиусом пучка в  $j$ -м слое, определяющем размерный радиус пятна по формуле

$$\rho_j = \rho_0 f_{lj} \quad (10)$$

Безразмерный радиус пучка связан с радиусом кривизны волновой поверхности простым дифференциальным соотношением

$$R_j^{-1} = \frac{1}{f_j} \frac{df_j}{dz_j}$$

В горловине пучка выполняется условие

$$f_1(0) = 1, \quad \left. \frac{df_1}{dz_1} \right|_{z_1=0} = \frac{1}{R_1(0)} = 0$$

Функция  $f_{lj}$  для аксиально-симметричных пучков в однородной линейной среде является решением дифференциального уравнения [5]

$$\frac{d^2 f_{lj}}{dz_j^2} = \frac{1}{D_j^2 f_{lj}^3} \quad (11)$$

где  $D_j$  - дифракционная длина пучка, равная длине зоны френелевской дифракции. Прямой подстановкой легко убедиться, что функция (9) удовлетворяет уравнению (11) при  $D_j = V'_j$ . Таким образом, при распространении волнового пучка в слоистой линейной среде роль дифракционной длины в каждом слое играет действительная часть варiances пучка. При этом в формуле (1)

$$\left( \frac{V'_j}{A_j} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{f_{lj}}$$

На границе раздела при законе изменения варiances, определяемом формулой

(4), функция  $f_{lj}$  удовлетворяет граничным условиям

$$f_{l,j+1}(0) = f_{l,j}(l_j) \quad (13)$$

$$f'_{l,j+1}(0)n_{j+1} = f'_{l,j}(l_j)n_j \quad (14)$$

В кубично нелинейной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E_0|^2$$

безразмерная ширина  $f_{nl}$  осесимметричного пучка находится из дифференциального уравнения [5]

$$\frac{d^2 f_{nl}}{dz^2} = \frac{1}{f_{nl}^3} \left( \frac{1}{D_{nl}^2} - \frac{\text{sign} \varepsilon_2}{G_{nl}^2} \right) \quad (15)$$

где  $D_{nl} = n_0 A_0$  - дифракционная длина пучка в линейной среде с показателем преломления  $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ . Параметр  $G_{nl}$  характеризует силу нелинейной рефракции и определяется формулой

$$G_{nl} = \rho \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2|\varepsilon_2|E_0^2}}$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$f_{nl}^2 = 1 + \frac{z^2}{D_{nl}^2} \sigma^2 \quad (16)$$

где

$$\sigma = (1 - (\text{sign} \varepsilon_2) \frac{D_{nl}^2}{G_{nl}^2})^{1/2}$$

Для слоистой нелинейной среды с плоскими границами раздела в  $j$ -среде функция  $f_{nl,j}$  имеет вид

$$f_{nl,j}^2 = 1 + \left( \sum_{m=1}^{j-1} l_m c_m + z_j c_j \right)^2 \quad (17)$$

где  $c_j = \sigma_j / D_{nlj}$ ,  $D_{nlj} = n_{0,j} A_0$ . При  $\varepsilon_{2,j} = 0$  и  $n_{0,j} = n_j$  (линейная слоистая система) формула (17) переходит в формулу (9), а для однородной нелинейной среды ( $\varepsilon_{0,j} = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{2,j} = \varepsilon_2$ ,  $z_j = z$ ) - в формулу (16).

Параметр  $A_{nlj}$  волнового пучка в нелинейной среде определяется формулой

$$A_{nlj} = n_{0,j} A_0 f_{nlj}^2 \quad (18)$$

Вариансы пучков в слоях имеют вид

$$V'_{nlj} = \frac{D_{nlj} \left[ 1 + \left( \sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j \right)^2 \right]}{1 + \sigma_j^2 \left( \sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j \right)^2} \quad (19)$$



$$V_{нлj}'' = \frac{D_{нлj} \sigma_j \left( \sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j \right) \left[ 1 + \left( \sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j \right)^2 \right]}{1 + \sigma_j^2 \left( \sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j \right)^2} \quad (20)$$

Для линейных сред (  $\varepsilon_{2j} = 0$ ,  $\varepsilon_{0j} = \varepsilon_j$  ) формулы(19), (20) переходят в соответствующие формулы (6), (7).

Граничные условия для функции  $f_{нл}$  имеют вид

$$f_{нл,j+1}(0) = f_{нл,j}(l_j) \quad (21)$$

$$\frac{f'_{нл,j+1}(0)}{c_{j+1}} = \frac{f'_{нл,j}(l_j)}{c_j} \quad (22)$$

Для линейных сред (  $\varepsilon_{2j} = 0$ ,  $\varepsilon_{0j} = \varepsilon_j$  ) граничные условия (21), (22) переходят в полученные выше условия (13), (14). Таким образом для функции  $f_{нлj}$ , определяющей безразмерную ширину пучка в нелинейной среде, известно дифференциальное уравнение (15) и граничные условия (21), (22).

Параметры волнового пучка  $A_j$  и  $R_j$  по обе стороны границы раздела можно связать с помощью операторов преобразования

$$A_{j+1}(0) = A_j(l_j) a_j \quad (23)$$

$$R_{j+1}(0) = R_j(l_j) r_j \quad (24)$$

Для линейных сред операторы преобразования для  $A_j$  и  $R_j$  одинаковы

$$a_{lj} = r_{lj} = B_j = \frac{D_{л,j+1}}{D_{лj}} \quad (25)$$

Для нелинейных сред операторы  $a_{нлj}$  и  $r_{нлj}$  различны

$$r_{нлj} = a_{нлj} \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}}, \quad a_{нлj} = \frac{D_{нл,j+1}}{D_{нлj}} \quad (26)$$

Для линейных сред параметр  $\sigma_j = 1$  и формула (26) переходит в формулу (25). Амплитуда прошедшего слой пучка определяется амплитудой падающего, умноженной на коэффициент прохождения Френеля, который формально справедлив и в нелинейном случае. Полученные результаты остаются справедливыми и для случая образования коллапса в одном из слоев, и для комбинированной среды, состоящей из линейных и нелинейных слоев.

Рассмотренная выше задача со слоистым нелинейным диэлектриком является хорошей моделью для решения задачи распространения волнового пучка в неоднородном в направлении распространения пучка нелинейном диэлектрике, путем моделирования неоднородного нелинейного диэлектрика слоистым однородным нелинейным диэлектриком.

## ГЛАВА 2. ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ НА РЕШЕТКАХ

### 2.1 Поляризация волновых пучков и сведение векторных задач дифракции волновых пучков на решетках к скалярным

Векторные функции  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , описывающие электромагнитное поле узкого монохроматического пучка, распространяющегося в направлении оси  $z$  в свободном пространстве, представим в виде

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_0(x, y, z) \exp[i(kz - \omega t)] \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}_0(x, y, z) \exp[i(kz - \omega t)],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\vec{E}_0(x, y, z)$  и  $\vec{H}_0(x, y, z)$  - медленно меняющиеся функции координат по сравнению с экспонентой. Если при этом выполнено условие

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial E_{0j}}{\partial z} \ll E_{0j}, \quad (j = x, y), \quad (2)$$

то  $E_{0j}$  удовлетворяет параболическому уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E_{0j} = 0 \quad (3)$$

Условие (2) означает медленное изменение поперечных компонент поля пучка в направлении распространения. Если потребовать выполнения еще одного условия

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial E_{0z}}{\partial j} \ll E_{0j}, \quad (j = x, y), \quad (4)$$

что означает медленное изменение продольных составляющих поля пучка в поперечном направлении, то из уравнений Максвелла с учетом (2) следует

$$H_{0y} = E_{0x}, \quad H_{0x} = -E_{0y} \quad (5)$$

Отметим, что условия (2) и (4) хорошо выполняются для узкого волнового пучка.

Тогда можно ввести два линейно поляризованных волновых пучка:

1.  $E_x$  - поляризованный пучок, у которого задано  $E_{0x}$ , а все остальные компоненты определяются через  $E_{0x}$

$$H_{0y} = E_{0x}, \quad E_{0z} = \frac{i}{k} \cdot \frac{\partial E_{0x}}{\partial x}, \quad H_{0z} = \frac{i}{k} \cdot \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \quad (6)$$

2.  $E_y$  - поляризованный пучок, у которого задано  $E_{0y}$ , а все остальные компоненты поля определяются через  $E_{0y}$

$$H_{0x} = -E_{0y}, \quad E_{0z} = \frac{i}{k} \cdot \frac{\partial E_{0y}}{\partial y}, \quad H_{0z} = -\frac{i}{k} \cdot \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \quad (7)$$

Из формул (1), (6), (7) видно, что поле волнового пучка представляет собой квазиплоскую волну с небольшими продольными составляющими, которые тем

меньше, чем уже пучок, т. к. при этом  $E_{oj}$  составляющие становятся все более медленно изменяющимися функциями  $x$  и  $y$ .

Наложение  $E_x$  и  $E_y$  поляризованных пучков дает эллиптически поляризованный пучок. При разности фаз, кратной  $\pi$ , эллипс вырождается в прямую, и результирующий пучок вновь линейно поляризован. При разности фаз, равной нечетному числу  $\pi/2$ , и равенстве амплитуд  $E_{ox}$  и  $E_{oy}$  эллипс превращается в окружность, и получаем круго поляризованный пучок, у которого

$$E_{oy} = jE_{ox}, (j = \pm i, j^2 = -1),$$

$$E_{oz} = \frac{i}{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) E_{ox}, \vec{H} = -j\vec{E}.$$

Физические свойства такого пучка подробно изучены в [1]. Однако при решении задач дифракции такое определение поляризаций волновых пучков нецелесообразно т. к. поперечные компоненты поля пучка удовлетворяют не волновому уравнению, а параболическому уравнению (3). Кроме того, фундаментальными задачами в теории дифракции являются задачи для плоской волны и если их решение для данного объекта известно, то можно рассматривать дифракцию и более сложных по структуре полей. При решении задач дифракции волнового пучка его представляют в виде непрерывной суперпозиции плоских волн, волновые векторы которых лежат в узком конусе вокруг направления распространения  $z$ . Поэтому требуется уточнить понятие поляризации волнового пучка, если он представлен в виде суперпозиции плоских волн.

В дальнейшем систему координат, связанную с пучком, будем обозначать со штрихом, начало этой системы отсчета поместим в горловину пучка, а ось  $o'z'$  направим вдоль оси пучка. Будем полагать, что направление распространения пучка происходит в сторону, противоположную оси  $o'z'$ . Волновой вектор плоской волны, распространяющейся вдоль оси пучка, обозначим  $\vec{k}_0$ , при этом  $\vec{k}_0 = -\vec{z}'_0$ , где  $\vec{z}'_0$  единичный вектор оси  $o'z'$ . Будем в дальнейшем называть  $E_x$  поляризованным пучком такой пучок, у которого при  $\vec{k} = \vec{k}_0$  вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $o'x'$ . Так как волновые векторы  $\vec{k} = n\vec{k}_0$  плоских волн в разложении волнового пучка по плоским волнам лежат в узком конусе вокруг  $\vec{k}_0$ . то при изменении направления вектора  $\vec{k}$  в пределах этого конуса, вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H} = [\vec{n} \cdot \vec{E}]$  каждой плоской волны совершают небольшие отклонения от осей  $o'x'$  и  $o'y'$  соответственно.

Тогда для  $\vec{k}$  в пределах указанного конуса выполняются два условия:

$$E_{y'}, E_{z'} \ll E_{x'} \quad (8)$$

и ими можно пренебречь в уравнениях Максвелла при определении  $\vec{H}$ ,

$$H_{x'}, H_{z'} \ll H_{y'} \quad (9)$$

и ими можно пренебречь при определении  $\vec{E}$ .

Представляя  $E_{z'}$  в виде (1) из уравнений Максвелла получаем формулы (6) и условие (2). Условие (4), которое, по существу, является условием малости продольных компонент, неявным образом содержится в (8), (9). Аналогично вводится  $E_{y'}$  поляризованный пучок.

Систему координат, связанную с одномерной (т. е. периодичной в одном направлении) решеткой, обозначим  $xuz$ . Будем полагать, что решетка лежит в плоскости  $xou$ , ее образующие (ленты, брусья и т. д.) направлены вдоль оси  $ox$ , решетка периодична вдоль оси  $ou$ , а ось пучка  $o'z'$  проходит через начало координат системы  $xuz$ .

Функцию распределения поля пучка в горловине  $\Psi(x', y')$  разложим в интеграл Фурье

$$\Psi(x', y') = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \exp[ik(\xi_{x'}x' + \xi_{y'}y')] d\xi_{x'} d\xi_{y'}. \quad (10)$$

Рассмотрим падение на решетку  $E$  поляризованного пучка. В силу произвольности выбора направления оси  $o'x'$  это не снижает общности задачи. В системе координат, связанной с пучком,  $E$  - составляющая поля пучка запишется в виде

$$E_{x'} = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \exp[ik(\xi_{x'}x' + \xi_{y'}y' + \xi_{z'}z')] d\xi_{x'} d\xi_{y'}, \quad (11)$$

где

$$\xi_{z'} = -\sqrt{1 - \xi_{x'}^2 - \xi_{y'}^2}.$$

В системе координат, связанной с решеткой,  $E$  - составляющая имеет вид

$$E_{x'} = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \exp[ik(\xi_{x'}x' + \xi_{y'}y')] d\xi_{x'} d\xi_{y'}, \quad (12)$$

где

$$F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) = F_0(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \exp[ik\xi_{z'}L],$$

$L$  - расстояние вдоль оси пучка от горловины до начала координат системы  $xuz$ .

Постоянные распространения  $\xi_j$  вдоль соответствующей оси  $j = x, y, z$  находятся по формуле

$$|\xi_j| = \|\cos \alpha_j\| \cdot |\xi_{j'}|, \quad (j = x, y, z) \quad (13)$$

где  $\|\cos \alpha_j\|$  - матрица направляющих косинусов для осей координат двух систем друг относительно друга,  $\alpha_{jj'}$  - угол между  $j$ -ой осью системы  $xuz$  и  $j'$ -ой осью системы  $x'y'z'$ ,  $|\xi_j|$  - вектор - столбец постоянных распространения вдоль осей координат соответствующей системы. Преобразования (13) описывают поворот системы координат  $x'y'z'$  вокруг центра системы.

Пространственный спектр составляющих  $E_x$  и  $H_x$  определяется с помощью преобразований Эйлера

$$\begin{aligned} F^E(\xi_{x'}, \xi_{y'}) &= F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) (\cos \Psi \cos \alpha_1 - \cos \alpha_{zz'} \sin \Psi \sin \alpha_1), \\ F^H(\xi_{x'}, \xi_{y'}) &= F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) (\cos \Psi \sin \alpha_1 + \cos \alpha_{zz'} \sin \Psi \sin \alpha_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где углы  $\alpha_{zz'}$ ,  $\Psi$ ,  $\alpha_1$  называются еще углами нутации, прецессии и чистого вращения;  $\Psi$  - угол между осью  $ox$  и линией узлов, т. е. линией, образованной пересечением плоскостей  $xoy$  и  $x'o'y'$ ,  $\alpha_1$  - угол между осью  $o'x'$  и линией узлов. Для случая нормального падения пучка на решетку линия узлов не определена и

$$\begin{aligned} F^E(\xi_{x'}, \xi_{y'}) &= F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \cos \alpha, \\ F^H(\xi_{x'}, \xi_{y'}) &= F^L(\xi_{x'}, \xi_{y'}) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\alpha$  - угол между осями  $ox$  и  $o'x'$ .

При дифракции на одномерных решетках  $E_x$  составляющая поля определяет так называемую  $E$  - поляризованную часть поля, у которой  $H_x = 0$ , а остальные четыре компоненты выражаются через  $E_x$ . Аналогично  $H_x$  - составляющая определяет  $H$  - поляризованную часть падающего на решетку поля и так же имеющую пять компонент ( $E_x = 0$ ) и компоненты этой части выражаются через  $H_x$ . Суперпозиция обеих пятикомпонентных поляризаций дает исходное шестикомпонентное поле. Разбиение падающего поля на две поляризации дает возможность свести векторную задачу дифракции к двум скалярным относительно каждой поляризации, т. к. при дифракции каждой из определенных выше поляризованных частей падающего поля его поляризация сохраняется и в рассеянном поле (только для одномерных решеток).

При известных  $E_x$  и  $H_x$  остальные четыре компоненты поля каждой поляризации можно определить, вводя два однокомпонентных вектора Герца – электрического  $\vec{\Pi}^e$  и магнитного  $\vec{\Pi}^m$ , каждый из которых имеет только одну составляющую, направленную вдоль оси  $ox$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^e &= \vec{x}_0 \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_e(\xi_{x'}, \xi_{y'}) e^{ik(\xi_{x'}x + \xi_{y'}y + \xi_{z'}z)} d\xi_{x'} d\xi_{y'}, \\ \vec{\Pi}^m &= \vec{x}_0 \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(\xi_{x'}, \xi_{y'}) e^{ik(\xi_{x'}x + \xi_{y'}y + \xi_{z'}z)} d\xi_{x'} d\xi_{y'}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$P_e(\xi_{x'}, \xi_{y'}) = \frac{F^E(\xi_{x'}, \xi_{y'})}{k^2(1 - \xi_x^2)}; \quad P_m = \frac{F^H(\xi_{x'}, \xi_{y'})}{k^2(1 - \xi_x^2)},$$

$E$  - поляризованная часть падающего поля определяется электрическим вектором Герца

$$E_x = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Pi_x^e, \quad E_y^e = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi_x^e, \quad E_z^e = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Pi_x^e, \quad (17)$$

$$H_x = 0, \quad H_y^e = -ik \frac{\partial}{\partial z} \Pi_x^e, \quad H_z^e = ik \frac{\partial}{\partial y} \Pi_x^e,$$

$H$  - поляризованная часть магнитным вектором Герца

$$H_x = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Pi_x^m, \quad H_y^h = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi_x^m, \quad H_z^h = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Pi_x^m, \quad (18)$$

$$E_x = 0, \quad E_y^h = ik \frac{\partial}{\partial z} \Pi_x^m, \quad E_z^h = -ik \frac{\partial}{\partial y} \Pi_x^m.$$

Простой проверкой легко убедиться, что

$$E_y = E_y^e + E_y^h, \quad E_z = E_z^e + E_z^h, \\ H_y = H_y^e + H_y^h, \quad H_z = H_z^e + H_z^h.$$

В формулировке краевой задачи для решеток участвуют все пять компонент поля каждой поляризации. Однако для решеток с плоскими границами элементов, совпадающими с координатными поверхностями (ленты, бруссы, полуплоскости и т. д.), отвлекаясь от их конкретного вида и учитывая только их свойство периодичности, можно сделать ряд выводов о системах уравнений, получаемых из граничных условий [8,13].

Для  $E$  - поляризации уравнение, получающееся из условия  $E_y^e \neq 0$  в плоскостях  $xoy$  для прошедшего поля, есть результат дифференцирования по  $y$  уравнения, получающегося из условия  $E_x = 0$  в плоскости  $xoy$ , и сложения с самим собой, умноженным на  $ik \cos \alpha_y$ , т. е. не является линейно независимым уравнением. Условие  $E_z^e = 0$  в плоскости  $xoz$  в волноводных каналах решеток автоматически выполняется при выполнении  $E_x = 0$ . Вследствие одинаковой зависимости от  $x$  в падающем, рассеянном полях и полях в волноводных каналах при выполнении непрерывности  $H_y^e$  и  $H_z^e$  на щелях в плоскости  $xoy$  автоматически выполняются условия непрерывности  $E_y^e$  и  $E_z^e$ .

Для  $H$  - поляризации требование непрерывности  $H_y^h$  и  $H_z^h$  на щелях в плоскости  $xoy$  автоматически следует из непрерывности  $E_y^h$  и  $E_z^h$ .

## 2.2 Дифракция волнового пучка, наклонно падающего на плоскую решетку

Дифракции волновых пучков на решетках посвящен ряд работ. В работе [14] для густой решетки в аналитическом виде решена задача отражения и прохождения гауссовых пучков основного типа на различных типах плоских решеток для случая нормального падения пучка. В работах [15,18] та же задача решена численно, но без ограничения на густоту дифракционной решетки, причем, в указанных работах исследовалась структура основной гармоник рассеянного поля. В квазиоптических системах решетки используются и для

деления падающего пучка на несколько пучков. Для ввода разделенных пучков в квазиоптическую линию надо знать структуру волновых пучков, порожденных высшими пространственными гармониками.

Пусть плоская одномерно периодическая решетка с периодом  $l$  расположена в плоскости  $z = 0$ . Тип решетки не конкретизируется, предполагается только, что ее образующие направлены вдоль оси  $ox$ . Сверху под углом падения  $\varphi$  на решетку падает двумерный волновой пучок  $m$  – порядка ( $m$  – типа)

$$u_m^{(0)}(y, z) = \sqrt{\frac{A_0}{A}} H_m\left(\sqrt{\frac{k}{A}} y_1\right) \exp\left(-\frac{ky_1^2}{2A} - i\frac{ky_1^2}{2R} - ikz_1 + i\left(m + \frac{1}{2}\right)u\right) \quad (1)$$

где  $H_m$  – полином Эрмита  $m$  – го порядка, параметр  $A = kr^2/2$  определяет радиус пятна поля  $r$ ,  $R$  – радиус кривизны волновой поверхности пучка, определяемые по формулам

$$A = A_0 \left[ 1 + \left(\frac{z_1}{A_0}\right)^2 \right], \quad R = z_1 \left[ 1 + \left(\frac{A_0}{z_1}\right)^2 \right]$$

$$u = \arctg \frac{z_1}{A_0}, \quad A_0 = \frac{kr_0^2}{2}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$r_0$  – радиус пятна поля в горловине волнового пучка, которая находится при  $z_1 = 0$ .

Под  $u_m^{(0)}$  понимается либо составляющая  $E_x$  поля волнового пучка (случай  $E$  – поляризации), либо составляющая  $H_x$  (случай  $H$  – поляризации).

Для определения рассеянного решеткой поля представление падающего волнового пучка в форме (1) неудобно. Для этого целесообразно воспользоваться интегральным представлением поля волнового пучка, представляющим собой разложение пучка (1) по плоским волнам, волновые векторы которых лежат в узком конусе около направления распространения пучка и составляют с ним угол  $\theta$ . Интегральное представление для пучка (1) имеет вид

$$u_m^{(0)}(y_1, z_1) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^0(\xi_1) \exp(ik\xi_1 y_1 - ik\sqrt{1 - \xi_1^2} z_1) d\xi_1 \quad (2)$$

где  $\xi_1 = \sin \theta_1$ ,  $F_m^0(\xi)$  – Фурье – преобразование функции распределения поля в горловине, определяемое формулой

$$F_m^0(\xi_1) = \sqrt{\frac{2\pi A_0}{k}} i^m (-1)^m H_m(\sqrt{kA_0} \xi_1) \exp\left(-\frac{kA_0 \xi_1^2}{2}\right) \quad (3)$$

Сворачивая интеграл (2) в квазиоптическом (параболическом) приближении аналогично [6], легко убедиться, что в результате получим формулу (1).

Формула (2) выписана в системе координат  $((y_1, o_1, z_1))$ , связанной с падающим волновым пучком. В системе координат  $((y, o, z))$  связанной с решеткой (ось  $oy$  направлена перпендикулярно образующим решетки, ось  $oz$  – по

нормали к плоскости решетки ) поле падающего пучка имеет вид

$$u_m^{(0)}(y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^0(\xi_1) \exp(ik(\sqrt{1-\xi_1^2}L + \xi y - \sqrt{1-\xi^2}z)) d\xi_1 \quad (4)$$

где  $\xi = \sin(\varphi + \theta)$ ,  $L$  - расстояние от горловины пучка до решетки вдоль оси пучка.

Рассеянное решеткой поле запишется в виде

$$u_m^{(1,2)}(y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^0(\xi_1) \exp(ik\sqrt{1-\xi_1^2}L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(1,2)}(\xi) \times \\ \exp\left\{i\left[\left(k\xi + \frac{2\pi n}{l}\right)y \pm \sqrt{k^2 - \left(k\xi + \frac{2\pi n}{l}\right)^2}z\right]\right\} d\xi_1 \quad (5)$$

где индекс 1 соответствует полупространству над решеткой  $z > 0$  (отраженное поле), индекс 2 – полупространству под решеткой  $z < 0$  (прошедшее поле). Знак плюс в экспоненте берется при  $z > 0$ , минус – при  $z < 0$ . Коэффициенты разложения рассеянного поля в ряд Фурье  $a_n^{(1)}(\xi)$  (при  $z > 0$ ) и  $a_n^{(2)}(\xi)$  (при  $z < 0$ ) определяют амплитуды пространственных гармоник, нахождение которых для различных типов решеток проведено в работах [8,17].

Переменная  $\xi$  связана с переменной интегрирования  $\xi_1$  соотношением

$$\xi = \xi_1 \cos \varphi + \sqrt{1-\xi_1^2} \sin \varphi \quad (6)$$

В силу узости углового спектра падающего волнового пучка  $\xi_1^2 \ll 1$  и формулу (6) можно представить в виде

$$\xi = \xi_1 \cos \varphi + \sin \varphi \quad (7)$$

Вводя новую переменную интегрирования  $\xi_2 = \xi_1 \cos \varphi$ , формулу (5) с учетом (7) можно переписать в виде

$$u_m^{(1,2)}(y, z) = \frac{k}{2\pi \cos \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n^{(1,2)}(\xi_2) F_m^0(\xi_2) \exp(ik\sqrt{1-\xi_2^2/\cos^2 \varphi}L) \times \\ \exp[ik((\xi_2 + \alpha_n)y \pm \sqrt{1-(\xi_2 + \alpha_n)^2}z)] d\xi_2 \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\alpha_n = \alpha + \frac{n}{\kappa}, \quad \alpha = \sin \varphi, \quad \kappa = \frac{l}{\lambda}$$

$n$  - номер пространственной гармонии.

$$\text{Введем обозначения} \quad \kappa \xi_2 = n_0 + \kappa \mu \quad (9)$$

где  $n_0$  - целая часть  $\kappa \xi_2$ , а  $-\frac{1}{2} < \kappa \mu \leq \frac{1}{2}$ . Тогда формула (8) преобразуется к виду

$$u_m^{(1,2)}(y, z) = \frac{k}{2\pi \cos \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2\kappa}^{1/2\kappa} a_n^{(1,2)}(n_0, \mu) F_m^0(n_0, \mu) \exp(i2\pi \sqrt{\kappa^2 - \frac{(n_0 + \kappa \mu)^2}{\cos^2 \varphi}} \frac{L}{l}) \times \\ \exp i2\pi[(n + n_0 + \kappa \mu + \alpha) \frac{y}{l} \pm \sqrt{\kappa^2 - (n + n_0 + \kappa \mu + \alpha)^2} \frac{z}{l}] d\mu$$



В континуальной суперпозиции плоских волн рассеянного решеткой поля (10) пространственные гармоники с номерами, удовлетворяющими условию

$$(n + n_0 + \kappa\mu + \alpha)^2 \leq \kappa^2 \quad (11)$$

распространяются от решетки, остальные затухают при удалении от нее. Условие (11) является условием излучения  $n$ -ой дифракционной гармоники. При  $N < \kappa < N + 1$ , где  $N$  - любое целое число, включая нуль, условию излучения (11) при заданном  $n_0$  удовлетворяют члены ряда по  $n$  с номерами от  $-(n_0 + \alpha) - N$  до  $-(n_0 + \alpha) + N$ .

Убывание ряда по  $n_0$  определяется угловым спектром падающего волнового пучка, который описывается функцией

$$F_m^0(n_0, \mu) \approx \exp(-\pi^2 \frac{r_0^2}{l^2 \cos^2 \varphi} (n_0 + \kappa\mu)^2)$$

$$\text{При условии} \quad \pi r_0 / l \gg 1 \quad (12)$$

функция  $F_m^0(n_0, \mu)$  практически отлична от нуля только при  $n_0 = 0$ . Условие (12) является условием густоты решетки, которое требует, чтобы на пятне поля укладывалось достаточно большое число периодов решетки. Таким образом при выполнении условий (11) и (12) рассеянное поле имеет вид

$$u_m^{(1,2)}(y, z) = \frac{k}{2\pi \cos \varphi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \int_{-\infty}^{\infty} a_n^{(1,2)}(\mu) F_m^0(\mu) \exp[ik[\sqrt{1 - \mu^2 / \cos^2 \varphi} L + (\alpha_n + \mu)y \pm \sqrt{1 - (\alpha_n + \mu)^2} z]] d\mu \quad (13)$$

Так как мы предполагаем падающий волновой пучок параксиальным т.е.  $\pi r_0 / \lambda \gg 1$ , то функция  $F_m^0(\mu)$  имеет острый локальный максимум при  $\mu = 0$ , в силу чего интегрирование в формуле (13) распространено на всю бесконечную ось. Амплитуды гармоник  $a_n^{(1)}$  и  $a_n^{(2)}$  изменяются достаточно плавно, поэтому в формуле (13) их можно вынести из под знака интеграла при значении  $\mu = 0$

$$a_n^{(1,2)} = a_n^{(1,2)}(\mu) \Big|_{\mu=0}$$

Раскладывая в ряд по  $\mu$  с точностью до квадратичных членов

$$\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\cos^2 \varphi}} \approx 1 - \frac{\mu^2}{2 \cos^2 \varphi}$$

$$\sqrt{1 - (\alpha_n + \mu)^2} \approx \sqrt{1 - \alpha_n^2} - \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_n^2}} \mu - \frac{1}{2(1 - \alpha_n^2)^{3/2}} \mu^2$$

и проводя интегрирование в (13), получаем

$$u_m^{(1,2)}(y, z) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n^{(1,2)} \sqrt{\frac{A_0(1 - \alpha_n^2)}{V_n \cos^2 \varphi}} \left(\frac{V_n^*}{V_n}\right)^{\frac{m}{2}} H_m\left(\sqrt{\frac{k A_0(1 - \alpha_n^2)}{|V_n|^2 \cos^2 \varphi}} y_n^{(1,2)}\right) \times$$

$$\exp\left(-\frac{k(y_n^{(1,2)})^2}{2V_n} + ik(L + z_n^{(1,2)})\right) \quad (14)$$

где введены лучевые системы координат, оси  $oz_n^{(1,2)}$  которых совпадают с направлением излучения гармоник

$$z_n^{(1,2)} = \alpha_n y \pm \sqrt{1 - \alpha_n^2} z \quad y_n^{(1,2)} = \sqrt{1 - \alpha_n^2} y \mp \alpha_n z$$

Параметр  $V_n$  являющийся вариансом  $n$ -го дифракционного пучка, определяется формулой

$$V_n = V_n' + V_n'' = \frac{A_0(1 - \alpha_n^2)}{\cos^2 \varphi} + i \left[ \frac{L(1 - \alpha_n^2)}{\cos^2 \varphi} + \hat{z}_n^{(1,2)} \right] \quad (15)$$

$$\text{где} \quad \hat{z}_n^{(1,2)} = \pm \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha_n^2}} \quad (16)$$

Варианс  $V_n$  полностью определяет структуру волнового пучка. Вводя параметр

$$u_n^{(1,2)} = \arctg V_n'' / V_n'$$

и представляя  $V_n^{-1}$  в виде

$$V_n^{-1} = A_n^{-1} - iR_n^{-1}$$

преобразуем формулу (14) к окончательному виду

$$u_m^{(1,2)}(y_n, z_n) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n^{(1,2)} \sqrt[4]{\frac{A_0(1 - \alpha_n^2)}{A_n \cos^2 \varphi}} H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_n}} y_n^{(1,2)} \right) \exp \left[ -\frac{k(y_n^{(1,2)})^2}{2A_n} + \right. \\ \left. + i \frac{k(y_n^{(1,2)})^2}{2R_n} \right] \exp i \left[ k(L + z_n^{(1,2)}) - (m + \frac{1}{2})u_n^{(1,2)} \right] \quad (17)$$

Таким образом, при выполнении условия (12), каждая из распространяющихся от решетки пространственных гармоник является волновым пучком того же порядка, что и падающий на решетку волновой пучок, а амплитуда и направление распространения волновых пучков дифракционного спектра совпадают с амплитудой и направлением распространения пространственных гармоник при дифракции на решетке плоской волны единичной амплитуды, падающий на решетку под тем же углом, что и падающий волновой пучок. Если условие (12) – условие густоты решетки – не выполняется, то структура поля дифракционных гармоник искажается и для ее определения необходим численный счет интеграла (10).

Величина  $\hat{z}_n^{(1,2)}$  имеет смысл лучевой координаты  $z_n^{(1,2)}$  и поэтому знак тильды в ней можно опустить. Параметр  $A_n$  определяет радиус пятна поля  $n$ -го дифракционного волнового пучка,  $R_n$  есть радиус кривизны его волновой поверхности. Эти параметры определяются формулами

$$A_n = A_{0,n} \left[ 1 + \left( \frac{L_n + z_n}{A_{0,n}} \right)^2 \right] \quad R_n = (L_n + z_n) \left[ 1 + \left( \frac{A_{0,n}}{L_n + z_n} \right)^2 \right] \quad (18)$$

где введены обозначения

$$A_{0,n} = \frac{A_0(1 - \alpha_n^2)}{\cos^2 \varphi} \quad L_n = \frac{L(1 - \alpha_n^2)}{\cos^2 \varphi}$$

Направление излучения дифракционных волновых пучков определяется соотношением

$$\sin \varphi_n = \alpha_n$$

где  $\varphi_n$  - угол, который составляет ось  $n$ -го дифракционного волнового пучка с нормалью к решетке.

Количество дифракционных волновых пучков равно  $N_1 + N_2 + 1$ , где  $N_1, N_2$  максимальный номер пространственной гармоники, удовлетворяющий условию излучения  $\alpha_n^2 < 1$

$$N_1 = [\kappa(1 + \sin \varphi)], \quad N_2 = [\kappa(1 - \sin \varphi)]$$

при заданных  $\kappa$  и  $\varphi$ . Квадратные скобки означают целую часть стоящего в них выражения.

Для основного ( нулевого ) дифракционного волнового пучка  $A_{0,0} = A_0$ ,  $L_0 = L$  и формулы для определения его параметров совпадают с аналогичными формулами для падающего волнового пучка. В отраженном поле направление отраженного нулевого дифракционного пучка получается зеркальным отражением от решетки. В прошедшем поле нулевой дифракционный пучок по направлению распространения и геометрическим параметрам совпадает с падающим, но в отличие от последнего имеет комплексный амплитудный множитель  $a_0^{(2)}$ .

Закон сохранения энергии при дифракции пучка имеет вид

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} (|a_n^{(1)}|^2 + |a_n^{(2)}|^2) \cos \varphi_n = \cos \varphi \quad (20)$$

При вычислении интегралов (13), казалось бы, с целью повышения точности получаемых результатов можно воспользоваться разложениями

$$a_n^{(1,2)}(\mu) \approx a_n^{(1,2)}(0) + \mu \frac{da_n^{(1,2)}}{d\mu} \Big|_{\mu=0} . \quad (21)$$

Т.е. в разложении амплитуд не ограничиваться только нулевым, а учитывать еще и члены первого порядка. Это приводит к тому, что каждая дифракционная гармоника будет представлять собой наложение трех типов волновых пучков:  $m$  – рядка, что и падающий, и двух других с порядками  $m+1$  и  $m-1$ , то есть будет наблюдаться при дифракции преобразование в другие типы пучков. Однако, как видно из (21) и (20), закон сохранения энергии при этом не выполняется, что свидетельствует о неправомерности использования разложений (21) и отсутствии преобразования в иные типы волновых пучков при их дифракции на решетках. Закон сохранения энергии требует, чтобы в разложениях амплитуд дифракционных гармоник ограничивались нулевыми членами, что исключает преобразование в другие типы пучков по сравнению с падающим. Таким образом, при дифракции волновых пучков на решетках каждая дифракционная гармоника является волновым пучком того же порядка, что и падающий

Варианс падающего на решетку пучка имеет вид

$$V = A_0 + iz_1 \quad (22)$$

Сравнивая формулы(22) и (15) для varianсов падающего и  $n$  – го дифракционного пучка, видим, что можно ввести оператор преобразования varianса падающего пучка  $V$  в varianс  $V_n$   $n$  –го дифракционного пучка по формуле

$$V_n = V' \cdot B_n + i[V''(L) \cdot B_n + z_n^{(1,2)}] \quad (23)$$

где

$$B_n = \frac{1 - \alpha_n^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi_n}{\cos^2 \varphi} \quad (24)$$

Оператор  $B_n$ , определяемый формулой (24), можно назвать оператором varianса волнового пучка при его дифракции на плоской периодической решетке. Таким образом, для решения задачи дифракции волнового пучка на решетке необходимо знать оператор  $a_n^{(1,2)}$ , на который надо умножить амплитуду падающего волнового пучка, и оператор преобразования varianса  $B_n$ . Амплитудный оператор представляет собой амплитуду дифракционных гармоник при дифракции плоской волны единичной амплитуды той же поляризации и падающей на решетку под тем же углом , что и волновой пучок. Если амплитудный оператор определяется всеми геометрическими параметрами решетки, то в оператор преобразования varianса входит только один параметр решетки – ее период. Поэтому для различных решеток амплитудные операторы различные, а оператор varianса один и тот же, определяемый формулой (24).

Плоские ( нулевой толщины ) решетки не обладают квазисобственными (поверхностными и вытекающими ) волнами. Поэтому у них нет резонансных углов падения и, следовательно, полученное решение задачи дифракции справедливо при любых углах падения. Единственное накладываемое на решение ограничение – это густота решетки. Малая угловая расходимость падающего волнового пучка обычно выполняется на практике и поэтому не является ограничивающим фактором.

Вариа́нс волнового пучка  $V$  полностью определяет структуру волнового пучка так как содержит в себе информацию о радиусе пятна поля и радиусе кривизны волновой поверхности. Поэтому знание оператора преобразования varianса  $B_n$  достаточно для определения пространственной структуры дифракционных волновых пучков. Кроме того это открывает новые возможности решения задач дифракции полей сложной пространственной структуры на решетках. Ввиду того, что функции Гаусса-Эрмита

$$\phi_m(\sqrt{\frac{k}{A_0}}x) = H_m(\sqrt{\frac{k}{A_0}}x) \exp(-\frac{kx^2}{2A_0})$$

описывающие распределение поля в горловине, образуют полную систему функций на бесконечном интервале, то раскладывая произвольное поле в плоскости излучающей апертуры в ряд Грамма-Шарлье

$$u(x) = \sum_{m=-N}^N c_m \phi_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_0}} x \right)$$

сводим задачу дифракции произвольного поля к задаче дифракции суперпозиции волновых пучков на решетке, решение которой дано выше. Тогда поле  $n$ -ой дифракционной гармоники описывается формулой

$$u_n(x, z) = \sum_{m=-N}^N c_m u_{m,n}^{(1,2)}(x, z)$$

Таким образом, определение пространственной структуры поля  $n$ -ой дифракционной гармоники сводится к суммированию полей волновых пучков, заданных аналитическими формулами. В то время как при прямом решении задачи дифракции необходимо дважды выполнить численное интегрирование – сначала для нахождения пространственного спектра падающего поля  $F^0(\xi)$ , а затем при вычислении интеграла (5). В предлагаемом алгоритме численное интегрирование выполняется только один раз – при определении коэффициентов разложения  $c_m$ .

### 2.3 Дифракция гауссового волнового пучка на плоской решетке, расположенной между двумя слоями диэлектрика

В работе [14] рассмотрена задача дифракции гауссовых волновых пучков основного типа на густых решетках. Под густыми решетками понимаются решетки, у которых на пятне поля волнового пучка укладывается достаточно большое количество периодов решетки, т. е.  $\pi w/l \gg 1$ , где  $w$  - радиус пятна поля пучка на решетке,  $l$  - период решетки. В реальных квазиоптических устройствах плоские решетки наносятся либо на поверхность диэлектрического слоя, либо располагаются между двумя слоями диэлектрика. Рассмотрим, как параметры диэлектрика влияют на структуру прошедшего и отраженного полей и, в отличие от [14], исследуем многоволновый режим излучения, когда излучается не одна, а несколько пространственных гармоник рассеянного поля.

Пусть плоская, например, ленточная решетка расположена между двумя слоями диэлектрика с толщиной  $a_1$  и показателем преломления  $n_1$  для первого слоя и  $a_2$ ,  $n_2$  - для второго слоя. Поле гауссового волнового пучка, падающего из полупространства  $z > a_1$  (область 1) на систему решетка - диэлектрические слои в системе координат  $y_1 o_1 z_1$ , связанной с падающим пучком, запишем в виде

$$U_m^{(o)}(y_1, z_1) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m^o(\xi_1) e^{ik\xi_1 y_1 - ik\sqrt{1-\xi_1^2} z_1} d\xi_1, \quad (1)$$

где

$$F_m^o(\xi_1) = \sqrt{\frac{2\pi A_o}{k}} i^m (-1)^m H_m(\sqrt{kA_o} \xi) e^{-\frac{kA_o \xi^2}{2}} \quad (2)$$

$F_m^o(\xi_l)$  - Фурье – преобразование функции распределения поля в горловине пучка

$$u_m^{(o)}(y_l, 0) = H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_o}} y \right) e^{-\frac{ky_l^2}{2A_o}}$$

Параметр  $A_o$ , называемый шириной пучка в горловине, определяет радиус пятна поля  $w_o$  в горловине  $A_o = \frac{kw_o^2}{2}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ . Горловина волнового пучка отстоит от точки пересечения оси пучка  $O_l z_l$  с поверхностью диэлектрика в плоскости  $z = a_l$  на расстоянии  $l_l$ . Начало координат  $O_l$  помещено в центр горловины пучка, т. е. является его центральной точкой.

Если свернуть интеграл (1) в квазиоптическом приближении (или его еще называют приближением параболического уравнения), при котором  $\sqrt{1 - \xi_l^2}$  раскладывается в ряд с точностью до квадратичных членов, то в результате получим

$$u_m^{(o)}(y_l, z_l) = \sqrt{\frac{V'(l)}{V(l)}} \left( \frac{V^*(l)}{V(l)} \right)^{\frac{m}{2}} H_m \left( \sqrt{\frac{kV'(l)}{|V(l)|^2}} y_l \right) e^{-\frac{ky_l^2}{2V(l)} + ikz_l}, \quad (3)$$

где  $V(l)$  - комплексный параметр, определяемый по формуле

$$V(l) = V'(l) + iV''(l) = A_o + iz_l \quad (4)$$

Формулу (3) можно назвать неявной формой записи поля гауссового волнового пучка. В теории гауссовых волновых пучков параметр  $V$ , называемый вариансом волнового пучка, играет важную роль. Вводя фазу варианса  $V(l)$  по формуле

$$u(z_l) = \arctg \frac{z_l}{A_o}$$

и представляя его в виде

$$\frac{l}{V(l)} = \frac{l}{A} - i \frac{l}{R}$$

получаем каноническую форму записи поля двумерного гауссового волнового пучка  $m$  - го порядка

$$U_m^{(o)}(y_l, z_l) = \sqrt[4]{\frac{A_o}{A}} H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A}} y_l \right) e^{-\frac{ky_l^2}{2A} - i \frac{ky_l^2}{2R}} e^{-ikz_l + i \left( m + \frac{l}{2} \right) U}, \quad (5)$$

где  $A$  - ширина пятна поля в произвольном сечении,  $R$  - радиус кривизны волновой поверхности в этом сечении, которые определяются через вариант пучка по формулам

$$A = A_o / \cos^2 U, \quad R = A_o / \sin U \cos U$$

В области 2 в системе координат  $y_2 o_2 z_2$ , связанной с преломленным волновым пучком, центр  $o_2$  которой расположен на поверхности диэлектрика с показателем преломления  $n_1$ , поле преломленного волнового пучка запишется в виде

$$U_m^{(o)}(y_2, z_2) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^{(1)}(\xi_1) F_m^o(\xi_1) F_m^{l_1}(\xi_1) \times \\ \times e^{ikn_1 \xi_2 y_2 - ikn_2 \sqrt{1-\xi_2^2} z_2} d\xi_1, \quad (6)$$

где

$$F_m^o(\xi_1) = e^{ik\sqrt{1-\xi_1^2} l_1}$$

$d^{(1)}(\xi_1)$  - амплитудные коэффициенты прохождения Френеля при падении плоской волны на границу раздела вакуум - диэлектрик. Переменная интегрирования  $\xi_1 = \sin \Theta_1$  определяет углы  $\Theta_1$ , которые составляют направления распространения плоских волн с осью падающего пучка, переменная  $\xi_2 = \sin \Theta_2$  - углы  $\Theta_2$  в преломленном пучке. Эти углы связаны между собой законом преломления

$$\sin(\varphi_1 + \Theta_1) = n_1 \sin(\varphi_2 + \Theta_2) \\ \sin \varphi_1 = n_1 \sin \varphi_2, \quad (7)$$

где  $\varphi_1$  - угол падения исходного пучка на диэлектрик,  $\varphi_2$  - угол преломления в диэлектрике с показателем преломления  $n_1$ . Решая совместно уравнения (7) с точностью до членов  $\xi_1^2$ , получаем

$$\xi_2 = \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cdot \xi_1 \quad (8)$$

Формула (6) определяет поле, падающее на решетку в системе координат, связанной с преломленным пучком. В системе координат  $y o z$ , связанной с решеткой, падающее на решетку поле запишется в виде

$$U_m^{(o)}(y, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^{(1)}(\xi_1) F_m^o(\xi_1) F_m^{l_1}(\xi_1) F_m^{l_2}(\xi_2) \times \\ \times e^{ikn_1 \xi y - ikn_1 \sqrt{1-\xi^2} z} d\xi_1, \quad (9)$$

где

$$F_m^{l_2}(\xi_2) = e^{ikn_1 \sqrt{1-\xi_2^2} l_2} \\ \xi = \sin(\varphi_2 + \Theta_2) \quad (10)$$

$l_2$  - путь, пройденный преломленным пучком в среде с показателем преломления  $n_1$ , и измеренный вдоль оси пучка  $o_2 z_2$ .

Рассеянное решеткой поле в областях 2 и 3 запишется в виде

$$U_m^{(2,3)}(y,z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^{(1)}(\xi_1) F_m^o(\xi_1) F_m^{l_1}(\xi_1) F_m^{l_2}(\xi_2) \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s^{(2,3)}(\xi_1) \times$$

$$\times e^{i\left(kn_1\xi + \frac{2\pi s}{l}\right)y \pm i\sqrt{k^2 n_{(1,2)}^2 - \left(kn_1\xi + \frac{2\pi s}{l}\right)^2} z} d\xi_1 \quad (11)$$

где верхние знаки и первые символы обозначений берутся для области 2, нижние знаки и вторые символы – для области 3,  $s$  - номер пространственной гармоники,  $a_s^{(1,2)}$  - комплексная амплитуда пространственных гармоник при дифракции плоской волны единичной амплитуды и той же поляризации, что и падающий волновой пучок. Для ленточной решетки и других типов плоских решеток определения коэффициентов  $a_s^{(1,2)}$  приведено в монографиях [8,15].

С точностью до членов  $\xi_1^2$

$$\xi = \frac{\xi_1}{n_1} \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2$$

Вводя новую переменную интегрирования  $\zeta = \xi_1 \cdot \cos \varphi_1$ , формула (11) преобразуется к виду

$$U_m^{(2,3)}(y,z) = \frac{k}{2\pi \cos \varphi_1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^{(1)}(\zeta) a_s^{(2,3)}(\zeta) F_m^o(\zeta) \times$$

$$\times e^{ik\sqrt{1-\zeta^2 / \cos^2 \varphi_1} l_1} e^{ikn_1\sqrt{1-\zeta^2 / n_1^2 \cos^2 \varphi_2} l_2} \times$$

$$\times e^{ikn_{(1,2)}\left(\frac{\zeta}{n_{(1,2)}} + \alpha_s(2,3)\right)y \pm ikn_{(1,2)}\sqrt{1-\left(\frac{\zeta}{n_{(1,2)}} + \alpha_s(2,3)\right)^2} z} d\zeta \quad (12)$$

где

$$\kappa = \frac{l}{\lambda}, \quad \alpha_s(2) = \sin \varphi_2 + \frac{s}{n_1 \kappa}$$

$$\alpha_s(3) = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_2 + \frac{s}{n_2 \kappa} \quad (13)$$

Введем обозначения  $\kappa\zeta = m_o + \kappa\mu$ , где  $m_o$  - целая часть  $\kappa\zeta$ , а  $|\kappa\mu| \leq \frac{1}{2}$ . В континуальной суперпозиции плоских волн (12), которой представлено рассеянное решеткой поле, пространственные гармоники с номером  $s$  удовлетворяющими условию

$$(m_o + \kappa\mu + \kappa n_1 \sin \varphi_2 + s)^2 < \kappa^2 n_{(1,2)}^2 \quad (14)$$

распространяются от решетки, остальные затухают при удалении от нее. Условие (14) является условием излучения  $s$ -й дифракционной гармоники. При  $N < \kappa n_{(1,2)} < N + 1$ , где  $N$  - любое целое число, включая нуль, условию излучения (14) удовлетворяют при заданном  $m_o$  члены ряда с номерами от  $N_1$  до  $N_2$ . где  $N_1 > -m_o - \kappa n_{(1,2)} \sin \varphi_2 - N$ ,  $N_2 < -m_o - \kappa n_{(1,2)} \sin \varphi_2 + N$ . При



$\pi w_o^2 / l \gg 1$  (случай густой решетки) ввиду быстрого убывания спектральной функции  $F_m^o(m_o, \mu)$  она отлична от нуля только при  $m_o = 0$ . При этом рассеянное поле в областях 2 и 3 можно представить в виде

$$U_m^{(2,3)}(y, z) = \frac{k}{2\pi \cos \varphi_1} \sum_{s=-N_1}^{N_2} \int_{-\infty}^{\infty} d^{(1)}(\mu) a_s^{(2,3)}(\mu) F_m^o(\mu) \times \\ \times e^{ik\sqrt{1-\mu^2/\cos^2 \varphi_1} l_1} e^{ikn_1 \sqrt{1-\mu^2/n_1^2 \cos^2 \varphi_2} l_2} \times \\ \times e^{ikn_{(1,2)} \left( \frac{\mu}{n_{(1,2)}} + \alpha_s(2,3) \right) y \pm ikn_{(1,2)} \sqrt{1 - \left( \frac{\mu}{n_{(1,2)}} + \alpha_s(2,3) \right)^2} z} d\mu \quad (15)$$

Функция  $F_m^o(\mu)$  имеет острый локальный максимум при  $\mu = 0$ . Поэтому коэффициент прохождения Френеля  $d^{(1)}(\mu)$  и амплитуды дифракционных гармоник  $a_s^{(2,3)}(\mu)$  можно вынести из-под знака интеграла при  $\mu = 0$ . а интегрирование распространить на бесконечные пределы. В дальнейшем будем обозначать

$$d^{(1)} = d^{(1)}(\mu) \Big|_{\mu=0}, \quad a_s^{(2,3)} = a_s^{(2,3)}(\mu) \Big|_{\mu=0}$$

Вычисляя интегралы (15) в квазиоптическом приближении (с использованием разложений корней квадратных в показателях экспонент по  $\mu$  с точностью до квадратичных членов) окончательно получаем

$$U_m^{(2,3)}(y_s^{(2,3)}, z_s^{(2,3)}) = d^{(1)} \sum_{s=-N_1}^{N_2} a_s^{(2,3)} \sqrt{\frac{V_s'(2,3)}{V_s(2,3)}} \left( \frac{V_s^*(2,3)}{V_s(2,3)} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times H_m \left( \sqrt{\frac{kn_{(1,2)} V_s'(2,3)}{|V_s(2,3)|^2}} y_s^{(2,3)} \right) e^{-\frac{kn_{(1,2)} (y_s^{(2,3)})^2}{2V_s(2,3)}} \times \\ \times e^{ik(l_1 + n_1 l_2 + n_{(1,2)} z_s^{(2,3)})} \quad (16)$$

где введены лучевые системы координат

$$y_s^{(2,3)} = \sqrt{1 - \alpha_s^2(2,3)} y \mp \alpha_s(2,3) \cdot z \\ z_s^{(2,3)} = \alpha_s(2,3) y \pm \sqrt{1 - \alpha_s^2(2,3)} z, \quad (17)$$

а комплексные параметры  $V_s(2,3) = V_s'(2,3) + iV_s''(2,3)$  определяются формулами

$$V_s'(2) = \frac{n_1 A_o \cos^2 \varphi_s^{(2)}}{\cos^2 \varphi_1}$$

$$V_s''(2) = \left( \frac{n_1 l_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{l_2}{\cos^2 \varphi_2} \right) \cos^2 \varphi_s^{(2)} + z_s^{(2)} \quad (18)$$

$$V'_s(3) = \frac{n_2 A_o \cos^2 \varphi_s^{(3)}}{\cos^2 \varphi_1} \quad (19)$$

$$V''_s(3) = \left( \frac{n_2 l_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{n_2 l_2}{n_1 \cos^2 \varphi_2} \right) \cos^2 \varphi_s^{(3)} + z_s^{(3)}$$

Сравнивая формулу (16) с формулой (3) приходим к выводу, что каждая распространяющаяся от решетки пространственная гармоника рассеянного поля представляет собой распространяющийся вдоль оси  $oz_s$  гауссовый волновой пучок того же порядка, что и падающий. Направление распространения  $s$ -го дифракционного волнового пучка составляет с нормалью к решетке угол  $\varphi_s^{(2,3)}$ , такой что

$$\sin \varphi_s^{(2,3)} = \alpha_s(2,3) \quad (20)$$

Вычисляя аналогично в квазиоптическом приближении поле преломленного пучка, определяемое интегралом (6), для преломленного волнового пучка получаем

$$U_m^{(0)}(y_2, z_2) = d^{(1)} \sqrt{\frac{V'(2)}{V(2)}} \left( \frac{V^*(2)}{V(2)} \right)^{\frac{m}{2}} H_m \left( \sqrt{\frac{kn_{(1)} V'_s(2)}{|V(2)|^2}} y_2 \right) \times \\ \times e^{-\frac{kn_1 y_2^2}{2V(2)}} e^{ik(l_1 + n_1 z_2)}$$

где вариант  $V(2)$  преломленного пучка определяется формулой

$$V(2) = \frac{n_1 A_o \cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} + i \left[ \frac{n_1 \cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} l_1 + z_2 \right] \quad (22)$$

Сравнивая формулы для вариантов падающего (4), преломленного (22) и дифракционных (18), (19) волновых пучков можно прийти к выводу, что если для каждого последовательного преобразования волнового пучка на препятствии, не изменяющем гауссовый характер распределения поля (автомодельное преобразование), ввести оператор преобразования варианта, то вариант пучка на  $j+1$ -м шаге преобразования связан с вариантом пучка на  $j$ -м шаге при преломлении и дифракции гауссова пучка на густой решетке следующим образом

$$V_{j+1}(z_{j+1}) = V'_j \cdot B_j + i[V''_j(l_j) \cdot B_j + z_{j+1}], \quad (23)$$

где  $B_j$  - оператор преобразования варианта в плоскости  $l_j$ , начало координаты  $z_{j+1}$  находится в плоскости  $l_j$ . Из полученных для вариантов формул (4), (18), (19), (22) видно, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков оператор преобразования варианта волнового пучка имеет вид

$$B_j = \frac{n_{j+1}}{n_j} \cdot \frac{\cos \varphi_{j+1}}{\cos \varphi_j}, \quad (24)$$

где  $n_{j+1}$  - показатель преломления последующей (по ходу распространения пучка) среды,  $n_j$  - показатель преломления предыдущей среды,  $\varphi_j$  - угол падения,  $\varphi_{j+1}$  - угол преломления. Оператор (24) может быть назван оператором преломления для варианта гауссового волнового пучка.

Оператор преобразования варианта волнового пучка при его дифракции на густой плоской решетке имеет вид:

1) для  $s$  - й гармоники отраженного поля

$$B_s(2) = \frac{\cos^2 \varphi_s^{(2)}}{\cos^2 \varphi_2}, \quad (25)$$

2) для  $s$  - й гармоники прошедшего поля

$$B_s(3) = \frac{n_2 \cos^2 \varphi_s^{(3)}}{n_1 \cos^2 \varphi_2}, \quad (26)$$

где  $\varphi_2$  - угол падения волнового пучка на решетку, а углы  $\varphi_s^{(2,3)}$  - определяются формулой (20).

Легко убедиться в том, что варианты дифракционных волновых пучков (18), (19) получаются из варианта (4) падающего пучка последовательным применением к нему оператора преломления (24) в плоскости  $z = a_1$  и операторов дифракции (25), (26) в плоскости решетки. Используя такой операторный метод преобразования варианта, было бы неправильным при переходе в область 3, т. е. при определении варианта дифракционных пучков прошедшего поля одновременно применить и оператор преломления и оператор дифракции к варианту  $V(2)$  преломленного пучка. Дело в том, что в операторе дифракции (26) для прошедшего поля уже содержится оператор преломления. Это следует из записи полей в задаче дифракции плоской волны на решетке при определении амплитуд волновых пучков дифракционного спектра.

Поля волновых пучков отраженного поля (область 1) и прошедшего поля (область 4) определяются формулой, аналогичной формуле (16), которую под знаком суммы надо умножить на амплитудные коэффициенты прохождения Френеля  $d_s^{(2,3)}$  через границы диэлектриков, а к вариантам  $V_s(2,3)$  применить оператор преломления (24) в плоскостях  $z = a_1, z = -a_2$ .

В результате получаем

$$U_m^{(1,4)}(y_s^{(1,4)}, z_s^{(1,4)}) = d^{(1)} \sum_{s=-N_1}^{N_2} d_s^{(2,3)} a_s^{(2,3)} \sqrt{\frac{V'_s(1,4)}{V_s(1,4)}} \left( \frac{V_s^*(1,4)}{V_s(1,4)} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times H_m \left( \sqrt{\frac{k V'_s(1,4)}{|V_s(1,4)|^2}} y_s^{(1,4)} \right) e^{-\frac{k(y_s^{(1,4)})^2}{2V_s(1,4)}} e^{ik(l_1 + n_1 l_2 + n_{(1,2)} l_s^{(2,3)} + z_s^{(1,4)})} \quad (27)$$

где верхние индексы у коэффициентов прохождения Френеля указывают из какой области падает волновой пучок,  $l_s^{(2,3)}$  - пути, проходимые дифракционными волновыми пучками во 2-й и 3-й областях соответственно,  $z_s^{(1,4)}$  - лучевые координаты вдоль которых распространяются дифракционные волновые пучки в 1-й и 4-й областях, начала отсчета которых лежат на границах диэлектриков, а направление определяется углами  $\varphi_s^{(1,4)}$ , отсчитываемыми от нормали

$$\sin \varphi_s^{(1)} = n_1 \alpha_s(2) = n_1 \sin \varphi_2 + \frac{s}{\kappa}$$

$$\sin \varphi_s^{(4)} = n_1 \alpha_s(3) = n_1 \sin \varphi_2 + \frac{s}{\kappa}$$

Вариансы дифракционных волновых пучков в областях 1 и 4 определяются формулами

$$V_s'(1,4) = \frac{A_o \cos^2 \varphi_s^{(1,4)}}{\cos^2 \varphi_1} \quad (28)$$

$$V_s''(1) = \left( \frac{l_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{l_2}{n_1 \cos^2 \varphi_2} \right) \cos^2 \varphi_s^{(1)} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_s^{(1)}}{\cos^2 \varphi_s^{(2)}} l_s^{(2)} + z_s^{(1)} \quad (29)$$

$$V_s''(4) = \left( \frac{l_1}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{l_2}{n_1 \cos^2 \varphi_2} \right) \cos^2 \varphi_s^{(4)} + \frac{1}{n_1} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_s^{(4)}}{\cos^2 \varphi_s^{(3)}} l_s^{(3)} + z_s^{(4)} \quad (30)$$

Вводя фазу

$$u_s^{(1,4)} = \arctg \frac{V_s''(1,4)}{V_s'(1,4)}$$

и представляя  $V_s^{-1}(1,4)$  в виде

$$\frac{1}{V_s(1,4)} = \frac{1}{A_s(1,4)} - i \frac{1}{R_s(1,4)},$$

преобразуем формулу (27) к каноническому виду

$$\begin{aligned} U_m^{(1,4)}(y_s^{(1,4)}, z_s^{(1,4)}) &= d^{(1)} \sum_{s=-N_1}^{N_2} d_s^{(2,3)} a_s^{(2,3)} \sqrt{\frac{V_s'(1,4)}{A_s(1,4)}} H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_s(1,4)}} y_s^{(1,4)} \right) \times \\ &\times e^{-\frac{k(y_s^{(1,4)})^2}{2A_s(1,4)} + i \frac{k(y_s^{(1,4)})^2}{2R_s(1,4)}} e^{ik(l_1 + n_1 l_2 + n_{(1,2)} l_s^{(2,3)} + z_s^{(1,4)})} \times \\ &\times e^{-i \left( m + \frac{1}{2} \right) U_s^{(1,4)}} \end{aligned} \quad (31)$$

Из формулы (17) следует, что распространяющимися от решетки дифракционными пучками будут пучки с номерами  $s$ , удовлетворяющими условию

$$\alpha_s^2(2,3) < 1, \quad (32)$$

которое с учетом формулы (13) можно переписать в виде

$$s_{\pm}^{(2)} < \kappa_1 (1 \mp \sin \varphi_2)$$

$$s_{\pm}^{(3)} < \kappa_2 \left( 1 \mp \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi_2 \right), \quad (33)$$

где  $s_+$  - номера положительных гармоник, удовлетворяющих условию излучения (32),  $s_-$  - номера отрицательных гармоник (в формуле (33) они взяты по модулю). При  $\kappa_1(1 + |\sin \varphi_2|) < 1$ ,  $\kappa_2 \left( 1 + \frac{n_1}{n_2} |\sin \varphi_2| \right) < 1$  от решетки распространяются только основные ( $s=0$ ) дифракционные волновые пучки (один отраженный и один прошедший), это, так называемый, одноволновый режим дифракции. При  $n_1 = n_2 = n$ ,  $\varphi_o^{(3)} = \varphi_2$ ,  $\varphi_o^{(4)} = \varphi_1$  направление основного прошедшего волнового пучка параллельно направлению распространения падающего, но смещено на расстояние  $d$ , определяемое известным геометрооптическим соотношением. Если при этом  $a_1 = a_2$ , то  $l_o^{(3)} = l_2$  и формула для варинанса прошедшего волнового пучка с номером  $s=0$  имеет вид

$$V_o(4) = A_o + i \left[ l_1 + \frac{2l_2}{n} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_2} + z_o^{(4)} \right],$$

что полностью совпадает с формулой для варинанса гауссова пучка. прошедшего через плоскопараллельный диэлектрический слой с показателем преломления  $n$ .

Аналогично решается задача, если границы диэлектрика не параллельны плоскости решетки, а составляют с ней некоторые углы. Окончательно формулы для поля дифракционных волновых пучков имеют тот же самый вид, что и формулы (31), изменяются при этом угол падения пучка на решетку и углы в операторе преломления для варинанса и, следовательно, в самих варинансах дифракционных волновых пучков, а также в коэффициентах прохождения Френеля и амплитудах дифракционного спектра.

Диэлектрический слой обладает квазисобственными волнами (поверхностными и вытекающими). Для диэлектрического слоя с решеткой каждая квазисобственная волна представляет собой сумму пространственных гармоник. Если угол падения  $\varphi_1$  близок к углу, под которым происходит утечка энергии на одной из гармоник квазисобственной волны (этот угол называется еще резонансным углом падения), то при этом эффективно возбуждается вытекающая волна и коэффициент  $a_s$  этой гармоники имеет резонансный характер, его уже нельзя выносить из под знака интеграла и поле этой гармоники существенно изменяется. Полученное решение представляет собой геометрооптическую часть решения задачи дифракции и применимы при углах падения  $\varphi_1$  далеких от  $\varphi_p$  - угла утечки вытекающей волны из диэлектрического слоя с решеткой – и малой угловой расходимости  $\Delta$  падающего пучка, которой должен удовлетворять условию  $\Delta \ll |\varphi_p - \varphi_m|$ , где  $\varphi_m$  - угол утечки ближайшей к  $\varphi_p$  другой вытекающей волны.

## 2.4 Структура поля затухающих гармоник при дифракции волновых пучков на одномерно периодических решетках

В текущем разделе в аналитическом виде решена задача дифракции слаборасходящихся гауссовых волновых пучков на одномерно периодических решетках для случая, когда на пятне поля укладывается большое число периодов решетки. Показано, что поля дифракционных гармоник, распространяющихся от решетки, являются волновыми пучками того же порядка, что и падающий волновой пучок. Структура поля затухающих дифракционных гармоник отлична от структуры падающего волнового пучка. В качестве меры структурных изменений введен обобщенный деструктивный параметр.

Дифракции волновых пучков на решетках посвящен ряд работ. В работе [14] для случая густой решетки в аналитическом виде решена задача отражения и прохождения волновых пучков для различных типов плоских решеток, в работе [15] та же задача решена численно. Однако при рассеянии волнового пучка на решетке помимо распространяющихся от решетки полей порождается бесконечный спектр затухающих гармоник, распространяющихся вдоль решетки с фазовой скоростью меньшей скорости света. Знание структуры полей затухающих гармоник важно для дифракционной электроники [19], в которой взаимодействие электронного потока происходит с одной из медленных пространственных гармоник, возникших при дифракции волнового пучка собственного колебания открытого резонатора на решетке, нанесенной на одно из зеркал резонатора.

Пусть плоская одномерно периодическая решетка с периодом  $l$  расположена в плоскости  $z=0$  и ее образующие направлены вдоль оси  $ox$ . Сверху нормально на решетку из полупространства  $z>0$  падает  $H$ -поляризованный двумерный волновой пучок,  $H_x$  - составляющая поля которого задана в виде

$$H_x^{i\alpha\alpha} = \sqrt[4]{\frac{A_0}{A_z}} H_n \left( \sqrt{\frac{k}{A_z}} y \right) e^{-\frac{ky^2}{2A_z} - i\frac{ky^2}{2R}} e^{-ikz + i\left(n + \frac{1}{2}\right)u}, \quad (1)$$

где

$$A_z = \frac{k w_z^2}{2} = A_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{A_0} \right)^2 \right], \quad A_0 = \frac{k w_0^2}{2}, \quad u = \arctg \frac{z}{A_0}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$w_0$  - радиус пятна поля в горловине пучка, которая предполагается в плоскости  $z=0$ ,  $H_n(y)$  - полином Эрмита  $n$ -го порядка.

От представления волнового пучка (1) можно перейти к интегральному представлению

$$H_x^{nao} = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\xi) e^{-ik\sqrt{1-\xi^2}z} e^{ik\xi y} d\xi, \quad (2)$$

где

$$F_n(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi A_0}{k}} i^n H_n(\sqrt{k A_0} \xi) e^{-\frac{k A_0 \xi^2}{2}} \quad (3)$$

Сворачивая интеграл (2) в квазиоптическом приближении, легко убедиться, что получаем в результате исходную формулу (1). Сущность квазиоптического (или параксиального) приближения состоит в том, что при разложении в ряд выражений, описывающих фазу, достаточно ограничиться квадратичными членами разложения и членами первой степени в амплитуде. Это эквивалентно переходу от волнового уравнения к параболическому и физически означает пренебрежение продольной диффузией амплитуды по сравнению с поперечной.

Рассеянное в полупространстве  $z > 0$  решеткой поле запишем в виде

$$H_x^{nad} = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\xi) \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s^H(\xi) e^{-ik(\alpha_s + \xi)y + ik\sqrt{1 - (\alpha_s + \xi)^2}z} d\xi, \quad (4)$$

где

$$\alpha_s = \frac{2\pi s}{kl} = \frac{s}{k}, \quad k = \frac{l}{\lambda},$$

$s$  - номер пространственной гармоники,  $\lambda$  - длина волны,  $a_s^H(\xi)$  - амплитуды пространственных гармоник, определение которых для различных типов решеток приведено в работах [13-14].

Введем обозначения

$$k\xi = n_0 + k\mu, \quad F_n(\xi) = F_n(n_0, \mu),$$

где  $n_0$  - целая часть  $k\xi$  и  $-\frac{1}{2} \leq k\mu < \frac{1}{2}$ .

Тогда формулу (4) преобразуем к виду

$$H_x^{pac} = \frac{k}{2\pi} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2k}^{1/2k} F_n(n_0, \mu) a_s^H(n_0, \mu) \times \\ \times e^{i2\pi(s+n_0+k\mu)\frac{y}{l} + i2\pi\sqrt{k^2 - (s+n_0+k\mu)^2}\frac{z}{l}} d\mu$$

В континуальной суперпозиции плоских волн (5) рассеянного решеткой поля волны, волновые числа которых удовлетворяют условию

$$(s + n_0 + k\mu)^2 < k^2, \quad (6)$$

распространяются от решетки, остальные затухают при удалении от нее.

При  $N < k < N + 1$ , где  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ , условию излучения (6) при заданном  $n_0$  удовлетворяют  $2N + 1$  членов ряда по  $s$  с номерами от  $n_0 - N$  до  $-n_0 + N$ . Все остальные члены ряда определяют поле пространственных гармоник, затухающих при удалении от решетки.

Убывание ряда по  $n_0$  определяется функцией

$$F_n(n_0, \mu) \sim e^{-\pi \frac{w_0^2}{l^2} (n_0 + k\mu)^2} \quad (7)$$

При выполнении условия густоты решетки

$$\frac{\pi w_0}{l} \gg 1 \quad (8)$$

функция  $F_n(n_0, \mu)$  практически отлична от нуля только при  $n_0=0$ . В дальнейшем функцию  $F_n(n_0, \mu)|_{n_0=0}$  будем обозначать  $F_n(\mu)$ . Физически условие (8) требует, чтобы на пятне поля в горловине пучка укладывалось большое число периодов решетки. Такие решетки могут быть названы густыми решетками в отличие от широко используемого в теории дифракции волн на решетках термина часто периодических решеток, для которых требуется, чтобы на длине волны указывалось много периодов решетки ( $\frac{l}{\lambda} \ll 1$ ). Так как мы предполагаем пучок параксиальным, т. е.

$$\frac{\pi w_0}{\lambda} \gg 1,$$

то функция  $F_n(\mu)$  имеет острый локальный максимум при  $\mu=0$ . Таким образом, при выполнении условий (7) и (8) рассеянное решеткой поле можно представить в виде

$$H_x^{pac} = H_x^{(1)} + H_x^{(2)},$$

где  $H_x^{(1)}$  - поле распространяющихся от решетки гармоник.

$$H_x^{(1)} = \frac{k}{2\pi} \sum_{s=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} a_s^H(\mu) F_n(\mu) e^{ik(\alpha_s + \mu)y + ik\sqrt{1 - (\alpha_s + \mu)^2}z} d\mu, \quad (9)$$

$H_x^{(2)}$  - поле затухающих гармоник

$$H_x^{(2)} = \frac{k}{2\pi} \sum_{|s| > N} \int_{-\infty}^{\infty} a_s^H(\mu) F_n(\mu) e^{ik(\alpha_s + \mu)y - k\sqrt{(\alpha_s + \mu)^2 - 1}z} d\mu \quad (10)$$

Ввиду того, что функция  $F_n(\mu)$  отлична от нуля только в окрестности  $\mu=0$ , то интегрирование в формулах (9) и (10) распространено на всю бесконечную ось. Так как функция  $F_n(\mu)$  имеет острый локальный максимум при  $\mu=0$ , а амплитуда гармоник  $a_s^H(\mu)$  изменяется достаточно плавно [8], то коэффициенты  $a_s^H(\mu)$  в формулах (9) и (10) можно вынести из под знака интеграла при значении  $\mu=0$

$$a_s^H = a_s^H(\mu)|_{\mu=0}$$

Раскладывая в ряд по  $\mu$  с точностью до квадратичных членов  $\sqrt{1 - (\alpha_s + \mu)^2}$  и проводя интегрирование в (9) получаем

$$H_x^{(1)} = \sum_{s=-N}^N a_s^H \sqrt{\frac{A_0(1 - \alpha_s^2)}{V_s^+}} \left( \frac{V_s^-}{V_s^+} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ky_s^2}{2V_s^+}} H_n(v_s) e^{ikz_s}, \quad (11)$$

где



$$V_s^\pm = A_0(1 - \alpha_s^2)^\mp \frac{iz}{\sqrt{1 - \alpha_s^2}}, \quad v_s = y_s \sqrt{\frac{kA_0(1 - \alpha_s^2)}{V_s^+ V_s^-}}$$

и введены лучевые координаты

$$y_s = \sqrt{1 - \alpha_s^2} y - \alpha_s z, \quad z_s = \alpha_s y + \sqrt{1 - \alpha_s^2} z$$

у которых ось  $oz_s$  совпадает с направлением распространения  $s$ -й гармоники при дифракции плоской волны падающей нормально на решетку.

Введем величину

$$u_s = \arctg \frac{z}{A_0(1 - \alpha_s^2)^{3/2}} \quad (12)$$

являющуюся фазой комплексного параметра  $V_s^+$ , который мы, следуя работе [4], будем называть вариансом волнового пучка. Варианс пучка  $V_s^+$  представим в виде

$$(V_s^+)^{-1} = A_{z,s}^{-1} - iR_s^{-1},$$

где

$$A_{z,s} = A_0(1 - \alpha_s^2) \left[ 1 + \frac{z}{A_0^2(1 - \alpha_s^2)^3} \right] = \frac{A_0(1 - \alpha_s^2)}{\cos^2 u_s} \quad (13)$$

$$R_s = \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha_s^2}} \left[ 1 + \frac{A_0^2(1 - \alpha_s^2)^3}{z^2} \right] = \frac{A_0(1 - \alpha_s^2)}{\cos u_z \sin u_z}.$$

С учетом (12) и (13) формула (11) преобразуется к виду

$$H_x^{(l)} = \sum_{s=-N}^N a_s^H \sqrt{\frac{A_0(1 - \alpha_s^2)}{A_{z,s}}} e^{-\frac{ky_s^2}{2A_{z,s}} + i\frac{ky_s^2}{2R_s}} H_n \left( \sqrt{\frac{k}{A_{z,s}}} y_s \right) e^{ikz_s - i\left(n + \frac{l}{2}\right)u_s} \quad (14)$$

Таким образом, каждая из распространяющихся от решеток гармоник является волновым пучком того же порядка, что и падающий на решетку волновой пучок, а амплитуда и направление распространения волновых пучков дифракционного спектра совпадает с амплитудами и направлением распространения пространственных гармоник при дифракции на решетке плоской волны. В формуле (14)  $R_s$  имеет смысл радиуса кривизны волновой поверхности  $s$ -го волнового пучка, а параметр  $A_{z,s}$  определяет радиус пятна

поля этого пучка  $w_{z,s} = \sqrt{\frac{2A_{z,s}}{k}}$ . Напомним, что полученный результат

справедлив только при выполнении условий (7) и (8). Если эти условия не выполняются, то структура поля распространяющихся дифракционных гармоник искажается и для ее определения необходим численный счет интегралов (9) как это сделано [15].

Раскладывая в ряд по  $\mu$  точно до квадратичных членов  $\sqrt{(\alpha_s + \mu)^2 - 1}$  и проводя интегрирование в (10) для поля затухающих гармоник получаем

$$H_x^{(2)} = \sum_{|s| \gg N} a_s^H \sqrt{\frac{A_0(\alpha_s^2 - 1)}{\hat{V}_s^-}} Q^{\frac{n}{2}} H_n(\hat{v}_s) e^{\frac{k\hat{y}_s^2}{2\hat{V}_s^-}} e^{ik\alpha_s y - k\sqrt{\alpha_s^2 - 1}z}, \quad (15)$$

где введены обозначения

$$\hat{V}_s^\pm = A_0(\alpha_s^2 - 1) \pm \frac{z}{\sqrt{\alpha_s^2 - 1}}, \quad \hat{v}_s = \hat{y}_s \sqrt{\frac{kA_0(\alpha_s^2 - 1)}{\hat{V}_s^+ \hat{V}_s^-}},$$

$$Q_s = \frac{\hat{V}_s^+}{\hat{V}_s^-}, \quad \hat{y}_s = \sqrt{\alpha_s^2 - 1}y + i\alpha_s z$$

Формула (15) может быть получена формальным образом из формулы (11) перестановкой местами слагаемых во всех множителях  $1 - \alpha_s^2$ . При этом справедливы замены

$$\phi_s \rightarrow i\hat{y}_s, \quad V_s^\pm \rightarrow -\hat{V}_s^\pm, \quad v_s \rightarrow \hat{v}_s$$

В дифракционной электронике наибольший интерес представляет компонента вектора напряженности электрического поля, перпендикулярная образующим решетки ( в наших обозначениях это  $E_y$  компонента ). С этой компонентой поля взаимодействует электронный поток при своем движении над решеткой. Раскладывая  $\sqrt{(\alpha_s + \xi)^2 - 1}$  в амплитуде в ряд в окрестности  $\xi = 0$  с точностью до линейных членов и учитывая, что

$$\xi F_n(\xi) = -i \left[ \frac{1}{2} F_{n+1}(\xi) - n F_{n-1}(\xi) \right]$$

для  $E_y$  компоненты поля затухающих волн получаем

$$E_y = -i \sum_{|s| \gg N} a_s^H \Theta_l^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha_s^2 - 1} \exp\left(-\frac{1}{\Theta_l} [Y^2 - \zeta_s^2 + iY\zeta_s] - k\sqrt{\alpha_s^2 - 1}z + ik\alpha_s y\right)$$

$$\left\{ H_n(\hat{v}_s) \left( \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \right)^{\frac{n}{2}} - i\sqrt{2}\beta_s \left[ \frac{1}{2} H_{n+1}(\hat{v}_s) \left( \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \right)^{(n+1)/2} - n H_{n-1}(\hat{v}_s) \left( \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \right)^{(n-1)/2} \right] \right\} \quad (16)$$

где введены безразмерные координаты

$$Y = \frac{y}{w_0}, \quad Z = \frac{z}{\lambda}$$

и безразмерные параметры

$$\zeta_s = \pi\beta_s \sqrt{\alpha_s^2 - 1}z, \quad (17)$$

$$\beta_s = \frac{\alpha_s \cdot \Theta}{2(\alpha_s^2 - 1)}, \quad \Theta_{1,2} = 1 \mp \frac{2\beta_s \zeta_s}{\alpha_s^2}, \quad \Theta = \frac{\lambda}{w_0}$$

В принятых обозначениях параметр  $\hat{v}_s$  преобразуется к виду

$$\hat{v}_s = \sqrt{\frac{2}{\Theta_1 \Theta_2}} (Y + i \zeta_s)$$

Координату  $y$  здесь удобно нормировать не на длину волны, а на радиус пятна поля в горловине. В формуле (16) параметр  $\alpha_s = \frac{s}{\kappa} = \frac{c}{v_s} > 1$  ( $v_s$  - фазовая скорость  $s$ -ой затухающей гармоники вдоль оси  $ou$ ,  $c$  - скорость света в вакууме) является коэффициентом замедления  $s$ -й гармоники. Поэтому затухающие гармоники называют еще медленными гармониками. При заданном номере пространственной гармоники коэффициентом замедления можно управлять, изменяя параметр  $k = l/\lambda$ .

Таким образом, функция распределения поля затухающих гармоник при  $z \neq 0$  отличается от функции распределения поля падающего волнового пучка. Обобщенным параметром, представляющим мерой таких структурных отличий, является параметр  $\zeta_s$ , определяемый формулой (17). Поэтому параметр  $\zeta_s$  в дальнейшем будем называть деструктивным параметром. Как видно из формулы (16), с возрастанием  $\zeta_s$  увеличивается различие в функциях распределения амплитуд и фаз поля медленных гармоник и поля падающего волнового пучка.

Для затухающих от решетки полей введем так называемую область сильных полей вблизи решетки, на границе которой амплитуда поля уменьшается в  $e$  раз. В этой области локализована подавляющая часть энергии переносимой медленными волнами, эта область имеет определяющее влияние на взаимодействие электронного потока и медленной волны. Поэтому выяснение условий, при которых в этой области распределение поля медленных волн отлично от распределения поля волнового пучка, представляет особый интерес.

На границе области сильных полей  $Z = \left(2\pi\sqrt{\alpha_s^2 - 1}\right)^{-1}$  и деструктивный параметр  $\zeta_s = \beta_s/2$ . При  $\alpha_s^2 \geq 2$  в силу условия (8)  $\beta_s \ll 1$ . В этом случае в (16) деструктивный параметр  $\zeta_s$  можно положить равным нулю и формула для  $s$ -ой гармоники приобретает вид

$$E_{y,s} = -ia_s^H \sqrt{\alpha_s^2 - 1} H_n(\sqrt{2}Y) e^{-Y^2} e^{-k\sqrt{\alpha_s^2 - 1}z + ik\alpha_s Y} \quad (18)$$

Таким образом, для медленных гармоник с замедлением  $\alpha_s^2 \geq 2$  во всей области сильных полей функция распределения поля медленных гармоник практически повторяет функцию распределения падающего волнового пучка. С ростом замедления  $\alpha_s$  поле затухающих гармоник "прижимается" к решетке и структурные изменения его становятся все менее заметными. Параметр  $\beta_s$  определяется замедлением гармоники  $\alpha_s$  и расходимостью волнового пучка  $\Theta$ . При приближении  $\alpha_s$  к 1, т. е. при приближении к точке "скольжения", когда

$s$ -я гармоника из затухающей трансформируется в распространяющуюся, параметр  $\beta_s$  резко возрастает и в области сильных полей происходят существенные изменения в распределении амплитуд и фаз поля медленной гармоники по сравнению с полем падающего волнового пучка, пренебрегать которыми уже нельзя и надо пользоваться общей формулой (16).

## 2.5. Дифракционное излучение электронного потока с переменной амплитудой плотности тока

### 1. Собственное поле электронного потока

Рассмотрим дифракционное излучение электронного потока конечных размеров, который движется над плоской решеткой, переменная составляющая плотности тока которого задана в виде

$$\hat{J} = j_0 F_1(x) F_2(y) \delta(z-a) \exp(ik\alpha y - i\alpha z) \quad (1)$$

Электронный поток для простоты считается бесконечно тонким, он пролетает на расстоянии  $a$  от поверхности решетки ( $a$  – прицельный параметр). Тип решетки не конкретизируется. Относительно нее только считается, что решетка одномерно периодическая с периодом  $l$  вдоль оси  $OY$ , ее образующие направлены вдоль оси  $OX$ , ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости решетки. Электронный поток движется в направлении оси  $OY$ , его размер вдоль оси  $OY$  (длина) –  $D$ , вдоль оси  $OX$  (ширина) –  $b$ . Функция  $F_1(x)$  заданна на отрезке  $(-b/2, b/2)$  и описывает изменение плотности конвекционного тока электронного потока вдоль оси  $OX$ . Функция  $F_2(y)$  заданная на отрезке  $(-D/2, D/2)$  и описывает изменение плотности тока вдоль оси  $OY$ . В формуле (1)  $k = \omega/c$ ,  $\alpha = c/v_e$  – коэффициент замедления электронного потока,  $v_e$  – скорость электронов,  $\delta(z-a)$  – дельта-функция,  $j_0$  – амплитуда плотности тока.

При  $F_2(y) = \text{const}$  плотность тока удовлетворяет уравнению непрерывности. Если  $F_2(y) \neq \text{const}$  то при

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = k\alpha F_2 \quad (2)$$

уравнение непрерывности выполняется тем точнее, чем большее замедление  $\alpha$ . Условие (2) означает что функция  $F_2(y)$  должна быть медленно меняющейся функцией по сравнению с  $\exp(ik\alpha y)$ .

Используя разложение в интеграл Фурье для функций

$$\begin{aligned} \delta(z-a) &= \frac{k}{2\pi} \int e^{ik\rho(z-a)} d\rho \\ F_1(x) &= \frac{k}{2\pi} \int G_x(\xi) e^{ik\xi x} d\xi \\ F_2(y) &= \frac{k}{2\pi} \int G_y(\zeta) e^{ik\zeta y} d\zeta \end{aligned}$$

получаем следующие формулы для однокомпонентного электрического вектора Герца  $\Pi_y^z$ , который направлен вдоль оси  $OY$  и определяет электромагнитное поле тока (1) в свободном пространстве

$$\Pi_y^z = -\frac{j_0}{2\pi c} \iiint \frac{G_x(\xi)G_y(\zeta)}{1 - \xi^2 - (\alpha + \zeta)^2 - \rho^2} \times \exp(ik(\xi x + (\alpha + \zeta)y + \rho(z - a))) d\xi d\zeta d\rho \quad (3)$$

Формула (3) определяет поле электронного потока в свободном пространстве в виде разложения в интеграл по плоским волнам, которое есть наиболее выгодным для решения задачи дифракции такого поля на решетке. Плоская волна является простейшим видом волн и задачи дифракции плоских волн на решетках для многих типов решеток хорошо изучены [8]. С использованием формулы (3) задача дифракции поля электронного потока сводится к задачи дифракции плоской волны, которая падает под вещественным или комплексным углом на решетку, с последующим интегрированием по всему континууму плоских волн.

Используя теорию вычетов интегралы по  $\rho$  возможно свернуть в аналитическом виде. Переходя в плоскость переменного  $\rho$ , контур интегрирования нужно выбрать таким образом, чтобы результат не содержал волн, которые приходят из бесконечности и волн, экспоненциально возрастающих при удалении от электронного потока.

Для решения задачи дифракции поле электронного потока необходимо разделить на две поляризации. При этом векторная задача дифракции сводится к двух скалярным:

$H$  – поляризованная часть поля электронного потока, в которой  $E_x=0$ ,  $H_x \neq 0$ , а остальные компоненты поля также отличны от нуля и выражаются через  $H_x$ , определяется одно компонентным магнитным вектором Герца  $\Pi_M$ , который направлен вдоль оси  $Ox$ ,

$E$  – поляризованная часть поля электронного потока в которой  $H_x=0$ ,  $E_x \neq 0$ , а остальные компоненты поля также отличны от нуля и выражаются через  $E_x$ , определяется одно компонентным электрическим вектором Герца  $\Pi_E$ , направленным вдоль оси  $Ox$ .

Для целей дифракционной электроники наибольший интерес представляет  $H$  - поляризованная часть поля электронного потока, которая может быть представлена в виде

$$\Pi^M = \Pi_1^M + \Pi_2^M + \Pi_3^M \quad (4)$$

где

$$\Pi_1^M = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 > 1} \Pi_x^M(\xi, \zeta) \exp(ik(\xi x + (\alpha + \zeta)y) - k\sqrt{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 - 1}|z - a|) d\xi d\zeta \quad (5)$$

$$P_2^M = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 \leq 1} P_x^M(\xi, \zeta) \exp(ik(\xi x + (\alpha + \zeta)y)) \pm \pm k\sqrt{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2} |z - a| d\xi d\zeta \quad (6)$$

$$P_3^M = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 = 1} P_y^M(\xi, \zeta) \exp(ik(\xi x + (\alpha + \zeta)y)) d\xi d\zeta \quad (7)$$

$$P_x^M(\xi, \zeta) = (1 - \xi^2)^{-1} G(\xi) G(\zeta) \quad (8)$$

Таким образом, модулированный электронный поток с переменной амплитудой плотности тока вдоль направления движения в свободном пространстве порождает три типа волн:

1. волны экспоненциально затухающие при удалении от электронного потока, которые определяются формулой (5),
2. волны, которые распространяются от электронного потока (собственное излучение электронного потока с переменной амплитудой плотности тока) и определяются формулой (6). Напомним, что при постоянной амплитуде плотности тока вдоль направления движения электронного потока собственное излучение потока отсутствует.
3. волны, которые распространяются в плоскости электронного потока и определяются формулой (7).

## 2. Поле дифракционного излучения

Поле излучения электронного потока, который движется над решеткой, состоит из двух частей: поля собственного излучения самого электронного потока, которое определяется формулой (6), и поля дифракционного излучения. Поле дифракционного излучения электронного потока с переменной амплитудой в отличие от потока с постоянной амплитудой состоит из трех принципиально разных частей - это распространяющиеся от решетки пространственные гармоники дифракционного поля при дифракции на решетке полей, которые описываются каждым слагаемым в формуле (4). Для электронного потока с постоянной амплитудой плотности тока в (4) остается только первое слагаемое. Рассмотрим каждую из частей поля дифракционного излучения подробнее.

**Поле 1** - это поле распространяющихся пространственных гармоник при дифракции на решетке затухающих от потока (неоднородных) волн (5). Это поле определяется формулой

$$P_1^e = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 \leq 1} P_M(\xi, \zeta) \sum_{(n)} a_n^{(1)}(\xi, \zeta) \times \exp(-k\sqrt{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 - 1}a) \exp(ik(\xi x + (a_n + \zeta)y + \gamma_n z)) d\xi d\zeta \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha_n = \alpha + \frac{n}{\kappa}, \quad \gamma_n = \sqrt{1 - \xi^2 - (\alpha_n + \zeta)^2}, \quad \kappa = \frac{l}{\lambda},$$

$a_n^{(1)}(\xi, \zeta)$  - коэффициенты разложения поля дифракционного излучения неограниченного модулированного электронного потока с постоянной амплитудой.

**Поле 2** - это поле распространяющихся гармоник при дифракции на решетке распространяющихся от потока (однородных) волн (6). Это поле определяется формулой

$$P_2^e = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 < 1} P_m(\xi, \zeta) \sum_{(n)} a_n^{(1)}(\xi, \zeta) \times \exp(ik\sqrt{1 - \xi^2 - (\alpha + \zeta)^2} a) \exp(ik(\xi x + (a_n + \zeta)y + \gamma_n z)) d\xi d\zeta \quad (10)$$

где  $a_n^{(2)}(\xi, \zeta)$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье рассеянного поля в задаче дифракции плоской волны на решетке.

**Поле 3** - это поле распространяющихся гармоник при дифракции на решетке распространяющихся в плоскости электронного потока волн (7). Это поле определяется формулой

$$P_3^e = -\frac{j_0}{2\pi c} \iint_{\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 = 1} P_m(\xi, \zeta) \sum_{(n)} a_n^{(3)}(\xi, \zeta) \times \exp(ik(\xi x + (a_n + \zeta)y + \gamma_n z)) d\xi d\zeta \quad (11)$$

Суммирование в формулах (9) - (11) выполняется по всем гармоникам, которые распространяются от решетки, т.е. таким, что удовлетворяют условию излучения

$$\xi^2 + (\alpha_n + \zeta)^2 < 1 \quad (12)$$

Количество гармоник, которые излучаются, определяются из условия излучения (12) и области интегрирования для каждого поля, которые должны выполняться одновременно. Введем следующие обозначения

$$\kappa\alpha = n_0 + \kappa\mu \quad \text{и} \quad \kappa\zeta = m_0 + \kappa\nu \quad (13)$$

где  $n_0$  - целая часть  $\kappa\alpha$ ,  $m_0$  - целая часть  $\kappa\zeta$ , а  $\kappa\mu$  и  $\kappa\nu$  - дробные части, такие, что  $|\kappa\mu| < 1/2$ ,  $|\kappa\nu| \leq 1/2$ .

**Поле 1.** При  $\kappa < N + \frac{1}{2}$  (где  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$  - целое число, включая нуль) условие излучения (12) дает

$$-(n_0 + m_0) - N \leq n \leq -(n_0 + m_0) + N \quad (14)$$

а область интегрирования приводит к соотношению

$$|n_0 + m_0| > N.$$

При  $N = 0$  (т.е.  $\kappa < \frac{1}{2}$ ) и при заданном  $n_0 + m_0$  излучается только одна гармоника с номером  $n = -(n_0 + m_0)$  и при этом  $m_0 \neq -n_0$ .

Оценивая интеграл (9) методом стационарной фазы для наиболее важного на практике режима одно волнового излучения, которое происходит при  $\kappa < \frac{1}{2}$  получим

$$P_I^e = \frac{ij_0}{4\pi^2 c} \cos \theta \sum_{(m_0)} P_m(\xi_0, \zeta_0^{(1)}) a_{-(n_0+m_0)}^{(1)}(\xi_0, \zeta_0^{(1)}) \times \exp(-k\sqrt{\xi_0^2 + (\alpha + \zeta_0^{(1)})^2} a) \exp(ikr)/r. \quad (15)$$

при этом в сумме должен быть пропущен член с  $m_0 = -n_0$ . В формуле (15) введена сферическая система координат

$$x = r \sin \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

и  $\xi_0, \zeta_0^{(1)}$  - стационарные точки, которые определяются формулами

$$\xi_0 = \sin \theta \sin \phi, \quad \zeta_0^{(1)} = \frac{m_0}{\kappa} - \mu + \sin \theta \cos \phi. \quad (16)$$

Как известно [20], дифракционное излучение электронного потока с постоянной амплитудой плотности тока представляет собой пространственную гармонику с номером  $n = -n_0$ , которая распространяется от решетки. Из формулы (15) видно, что электронный поток со переменной амплитудой плотности тока порождает дифракционное излучение в виде бесконечного количества пространственных гармоник, которые распространяются от решетки. Амплитуда гармоник, которые излучаются, определяется коэффициентами  $a_{-(n_0+m_0)}$ , которые уменьшаются при увеличении замедления потока, и еще в большей мере функцией  $G_y(m_0)$ , которая есть Фурье – преобразованием функции  $F_2(y)$ , что описывает изменение амплитуды тока вдоль потока. Если на длине потока укладывается много длин волн, которое обычно выполняется в дифракционной электронике, то функция  $G_y(m_0)$  быстро уменьшается при росте  $m_0$  и подавляющий взнос в сумму (15) вносит член с номером  $m_0 = 0$ .

В этом случае

$$P_I^e = \frac{ij_0}{4\pi^2 c} a_{-n_0}(\xi_0, \zeta_0^{(1)}) G_x(\xi_0) G_y(\zeta_0^{(1)}) \cos \theta [1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi]^{-1/2} \times \exp(-k\sqrt{\xi_0^2 + (\alpha + \zeta_0^{(1)})^2} - la) \times \exp(ikr)/r. \quad (17)$$

$$\text{где} \quad \zeta_0^{(1)} = -\mu + \sin \theta \cos \phi \quad (18)$$

**Поле 2.** При  $\kappa < N + \frac{1}{2}$  из определения области интегрирования вытекает

$$-N < n_0 + m_0 < N \quad (19)$$

Подстановка (19) в условие излучения (12) приводит к определению количества гармоник, которые излучаются

$$-2N < n < 2N$$



т.е. количество гармоник, которые излучаются, равняется  $2N + 1$ . При  $\kappa < \frac{1}{2}$  излучается только одна гармоника с номером  $n = -(n_0 + m_0)$ . При этом из (19) вытекает, что  $n_0 + m_0 = 0$  и, следовательно,  $n = 0$ . Т.е. излучается только основная гармоника рассеянного поля

$$P_2^e = \frac{j_0}{4\pi^2 c} a_0(\xi_0, \zeta_0^{(2)}) \frac{G_x(\xi_0) G_y(\zeta_0^{(2)})}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi} e^{ik \cos \theta} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (20)$$

где  $\zeta_0^{(2)} = -\alpha + \sin \theta \cos \phi + -(\frac{n_0}{\kappa} + \mu) + \sin \theta \cos \phi$ .

**Поле 3.** Подстановка области интегрирования в условие излучения приводит к соотношению

$$-2(\alpha + \zeta) \frac{n}{\kappa} - \frac{n^2}{\kappa^2} > 0 \quad (21)$$

$$\text{где} \quad -1 \leq (\alpha + \zeta) \leq 1 \quad (22)$$

Из (21), (22) вытекает, что максимальный номер гармоники, которая излучается, должен удовлетворять неравенству

$$|n_{\max}| < 2\kappa.$$

При  $\kappa < \frac{1}{2}$   $n_{\max} = 0$ , т.е. излучается только основная гармоника с номером  $n = 0$ , поле которой определяется формулой

$$P_3^e = \frac{j_0}{4\pi^2 c} a_0(\xi_0, \zeta_0^{(2)}) \frac{G_x(\xi_0) G_y(\zeta_0^{(2)})}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi} \times \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (23)$$

Как отмечалось выше, функция  $G_y(\zeta_0)$  быстро убывает при увеличении  $\zeta_0$ . Для поля 1 параметр  $\zeta_0$  определяется формулой (18), а для полей 2 и 3 формулой (20), из которых видно, что

$$\zeta_0^{(2)} = -\frac{n_0}{\kappa} + \zeta_0^{(1)}.$$

При  $\kappa < \frac{1}{2}$  в силу быстрого убывания функции  $G_y(\zeta_0)$  выполняется неравенство

$$G_y(\zeta_0^{(2)}) \ll G_y(\zeta_0^{(1)})$$

и при малом прицельном параметре  $a$  доминирующий внос в поле дифракционного излучения вносит поле 1, а вносами полей 2 и 3 возможно пренебречь.

Таким образом, при малом прицельном параметре основной внос в поле дифракционного излучения вносят гармоники рассеянного поля, которые обусловлены дифракцией на решетке затухающих при удалении от потока волн, как это имеет место и для электронного потока с постоянной амплитудой плотности тока.

## 2.6 Голографирование в поле гауссовых волновых пучков

В большинстве работ по голографии рассмотрены голографическая запись и реконструкция изображения для случаев, когда опорная и восстанавливающая волны являются либо сферическими, либо плоскими [21-24]. Рассмотрим, как изменяются параметры голографического изображения, если опорные и восстанавливающие волны представляют собой гауссовые волновые пучки. При записи голограммы существенное значение имеет временная и пространственная когерентность. Поэтому в качестве источников света используются лазеры, поле излучения которых представляет собою гауссовые волновые пучки. В качестве объектов записи рассмотрим простейшие объекты – точечный объект и плоский предмет ( транспарант ).

### 1. Поле опорного и восстанавливающего пучков в плоскости голограммы

Будем полагать, что фотопластинка находится в плоскости  $z = 0$ . Запись голограммы происходит путем регистрации интерференции волны, несущей информацию о предмете, с опорной волной, когерентной первой, в качестве которой возьмем гауссовый волновой пучок, распространяющийся вдоль оси  $oz_1$

$$u_o = A_o \exp \left( -\frac{x_1^2 + y_1^2}{\rho_o^2} + ik \frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_o} + ikz_1 \right) \quad (1)$$

Проекция оси  $oz_1$  на плоскость  $xoz$  составляет с осью  $oz$  угол  $\theta_{ox}$ , а проекция на плоскость  $yo z$  - угол  $\theta_{oy}$  с осью  $oz$ .

В качестве восстанавливающей волны возьмем так же гауссовый волновой пучок

$$u_e = A_e \exp \left( -\frac{x_2^2 + y_2^2}{\rho_e^2} + ik \frac{x_2^2 + y_2^2}{2R_e} + ikz_2 \right) \quad (2)$$

распространяющийся вдоль оси  $oz_2$ , проекция которой на плоскости  $xoz$  и  $yo z$  составляет с осью  $oz$  углы  $\theta_{ex}$  и  $\theta_{ey}$ , соответственно.

Параметры волновых пучков – радиус пятна поля  $\rho_j$  и радиус кривизны волновой поверхности  $R_j$  определяются формулами

$$\rho_j = \rho_{oj} \left[ 1 + \frac{z_j^2}{A_{oj}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad R_j = z_j \left[ 1 + \frac{A_{oj}^2}{z_j^2} \right], \quad (j = o, e) \quad (3)$$

где  $A_{oj} = \pi \rho_{oj}^2 / \lambda$ .

Координата  $(x_o, y_o, z_o)$  определяет центр пятна поля в горловине опорного пучка, координата  $(x_e, y_e, z_e)$  - центр горловины восстанавливающего пучка.

Параметр  $\rho_o^j$  определяет радиус пятна поля в горловине пучка.

Переходя в декартову систему координат, связанную с голограммой, необходимо сделать преобразование координат, которые при небольших отклонениях осей  $oz_1$  и  $oz_2$  от оси  $oz$  имеют вид

$$\begin{aligned}x_k &= (x - x_j) + (z - z_j) \sin \theta_{jx} \\y_k &= (y - y_j) + (z - z_j) \sin \theta_{jy} \\z_k &= (z - z_j) - (x - x_j) \sin \theta_{jx} - (y - y_j) \sin \theta_{jy}\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\sin \theta_{jx} = \frac{x_j}{r_j}, \quad \sin \theta_{jy} = \frac{y_j}{r_j}$$

В формулах (4) индексу  $k=1$  соответствует индекс  $j=o$ , индексу  $k=2$  - индекс  $j=v$ .

С учетом координатных преобразований (4) фаза волновых пучков в плоскости голограммы имеет вид

$$\Phi_j(x, y) = k \left[ \frac{x^2}{2R_j} + \frac{y^2}{2R_j} - x \sin \theta_{jx} - y \sin \theta_{jy} \right] \quad (5)$$

В параксиальном приближении, при котором справедлива аппроксимация

$$r_j = z_j + \frac{x_j^2}{2z_j} + \frac{y_j^2}{2z_j},$$

пренебрегая величинами второго порядка малости получаем

$$\begin{aligned}\rho_j &= \rho_{oj} \left[ 1 + \frac{z_j^2}{A_{oj}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad R_j = z_j \left[ 1 + \frac{A_{oj}^2}{z_j^2} \right] \\ \sin \theta_{jx} &= \frac{x_j}{z_j}, \quad \sin \theta_{jy} = \frac{y_j}{z_j}\end{aligned}\quad (6)$$

С учетом (6) формула (5) преобразуется к виду

$$\Phi_j(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{R_j} - \frac{2xx_j + 2yy_j}{z_j} \right) \quad (7)$$

## 2. Голографирование точечного объекта

Точечный объект порождает сферическую волну

$$u_s = A_s \exp(ikr_s)$$

где  $r_s = \left[ (x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  - расстояние между точкой  $(x_s, y_s, z_s)$ , где находится точечный источник  $S$ , и произвольной точкой наблюдения  $(x, y, z)$ . Поместим в плоскость  $z=0$  тонкую фотопластинку (см. рис.7).

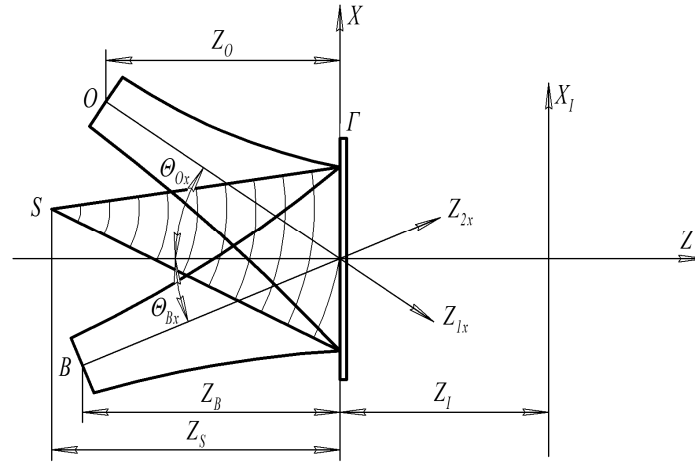


Рисунок 7

В параболическом приближении для точек, лежащих в плоскости  $z = 0$ , имеем

$$r_s = z_s + \frac{(x_s - x)^2}{2z_s} + \frac{(y_s - y)^2}{2z_s} \quad (8)$$

Фаза  $\Phi_s(x, y)$  сферической волны точечного объекта  $S$  в приближении (8) в плоскости голограммы имеет вид

$$\Phi_s(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2 - 2xx_s - 2yy_s}{z_s} \right) \quad (9)$$

При реконструкции возникают волна нулевого порядка дифракции, не несущей информации об объекте, а также две волны первого порядка дифракции – основная и вторичная – которые и формируют восстановленные изображения (основное и вторичное). Фаза волны первого порядка дифракции  $\Phi_I(x, y)$  удовлетворяет соотношению [21]

$$\Phi_I = \Phi_g \mp \Phi_o + \Phi_s \quad (10)$$

где верхние знаки берутся для основного изображения, а нижние – для вторичного.

Фаза реконструированной волн  $\Phi_I(x, y)$  должна иметь вид, аналогичный фазе (9) предметной волны

$$\Phi_I(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2 - 2xx_I - 2yy_I}{z_I} \right) \quad (11)$$

Подставляя формулы (7), (9), (11) в формулу (10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x$  и  $y$ , получаем соотношения для координат голографического изображения точки

$$\frac{1}{z_I} = \frac{1}{R_g} \mp \frac{1}{R_o} \pm \frac{1}{z_s} \quad (12)$$

$$x_I = z_I \left( \frac{x_g}{z_g} \mp \frac{x_o}{z_o} \pm \frac{x_s}{z_s} \right), \quad y_I = z_I \left( \frac{y_g}{z_g} \mp \frac{y_o}{z_o} \pm \frac{y_s}{z_s} \right) \quad (13)$$

Если запись и восстановление точечного объекта производится в поле сферических волн, то поперечные координаты  $x_I$ ,  $y_I$  голографического

изображения точки определяются теми же формулами (13), а продольная координата  $z_I$  формулой

$$\frac{1}{z_I} = \frac{1}{z_o} \mp \frac{1}{z_o} \pm \frac{1}{z_s} \quad (14)$$

Таким образом, если в качестве опорной и восстанавливающей волн используются гауссовы волновые пучки, то продольная координата голографического изображения точки изменяется по сравнению со случаем записи и восстановления в поле сферических волн. Изменение продольной координаты  $z_I$  влечет за собой изменение поперечных координат  $x_I, y_I$ .

### 3. Голографирование плоского предмета

Будем полагать, что плоский предмет находится в плоскости, отстоящей на расстоянии  $z_s$  от фотопластинки, которая расположена в плоскости  $z = 0$ . Ось  $oz$  перпендикулярна плоскости предмета и фотопластинке (см. рис.8).

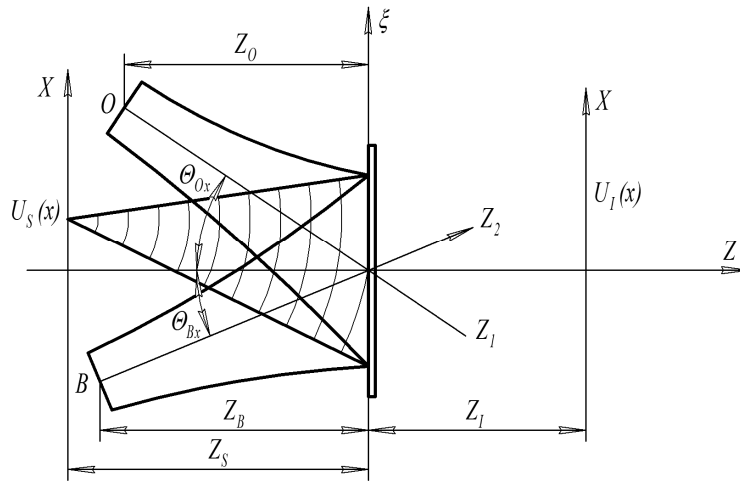


Рисунок 8

Поперечные координаты в плоскости предмета обозначим  $(x, y)$ , в плоскости голограммы  $(\xi, \mu)$ , в плоскости изображения  $(X, Y)$ . Предмет освещен когерентным светом и на фотопластинку падает дифракционная картина от предмета. Экран, на котором наблюдается восстановленное изображение, расположен на расстоянии  $z_I$  от голограммы.

Поле опорного и восстанавливающего волновых пучков в плоскости голограммы при небольших отклонениях осей их распространения от оси  $oz$  с учетом формулы (7) можно записать в виде

$$u_j(\xi, \mu) = A_j \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \mu^2}{\rho_j^2} i \frac{k}{2} \left( \frac{\xi^2 + \mu^2}{R_j} - \frac{2\xi x_j + 2\mu y_j}{z_j} \right) \right] \quad (j = o, s) \quad (15)$$

В параболическом приближении амплитуда дифрагированной на голограмме волны первого порядка, которая формирует основное (или истинное) изображение предмета, определяется формулой

$$u_1(X, Y) = C \exp \left[ -\frac{ik}{2z_I} (X^2 + Y^2) \right] \times \iint u_s(x, y) F_1(x) F_2(y) \exp \left[ -i \frac{k}{2z_s} (x^2 + y^2) \right] dx dy \quad (16)$$

где  $u_s(x, y)$  - амплитуда вторичных волн, испускаемых рассеивающим телом,

$$C = A_o A_g \exp ik(z_s - z_I)$$

$$F_1(x) = \int \exp \left[ -\left( \frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_g} \right) \xi^2 + \frac{ik}{2} \left( \frac{1}{z_g} - \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_g} - \frac{1}{z_I} \right) \xi^2 - ik \left( \frac{x}{z_s} - \frac{x_o}{z_o} + \frac{x_g}{z_g} - \frac{x}{z_I} \right) \xi \right] d\xi \quad (17)$$

$$F_2(y) = \int \exp \left[ -\left( \frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_g} \right) \mu^2 + \frac{ik}{2} \left( \frac{1}{z_s} - \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_g} - \frac{1}{z_I} \right) \mu^2 - ik \left( \frac{y}{z_s} - \frac{y_o}{z_o} + \frac{y_g}{z_g} - \frac{y}{z_I} \right) \mu \right] d\mu \quad (18)$$

Интегрирование в формуле (16) осуществляется по всей поверхности плоского предмета, а в формулах (17), (18) – по поверхности голограммы. Эти относительно сложные формулы (16)-(18) описывают амплитуду дифрагированной волны, которая порождает основное голографическое изображение.

Чтобы получить резкое изображение без дифракционных эффектов, необходимо дифракционную картину наблюдать на расстоянии, при котором исчезает квадратичный фазовый член в формулах (17), (18), что выполняется при условии

$$\frac{1}{z_I} = \frac{1}{z_s} - \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_g} \quad (19)$$

Формула (19) полностью совпадает с формулой (12). При этом формулы (17), (18) существенно упрощаются. Определяющий вклад в интегралы (17), (18) вносят окрестности точек  $\xi = 0$  и  $\mu = 0$ . Величины  $\rho_o$  и  $\rho_g$ , вследствие использования увеличения расходимости пучков, имеют достаточно большие значения. Поэтому экспоненциально убывающие множители в подынтегральных выражениях (17), (18) являются медленно убывающими функциями и их можно заменить их значениями при  $\xi = 0$  и  $\mu = 0$ . В результате получаем

$$F_1(x) = \delta \left( \frac{x}{z_s} - \frac{x_o}{z_o} + \frac{x_g}{z_g} - \frac{x}{z_I} \right) \quad (20)$$

$$F_2(y) = \delta \left( \frac{y}{z_s} - \frac{y_o}{z_o} + \frac{y_g}{z_g} - \frac{y}{z_I} \right) \quad (21)$$

где  $\delta(x)$ - дельта функция. Подстановка (20), (21) в (17), (18) приводит к окончательной формуле

$$u_1(X, Y) = C_1 u_s(\hat{X}, \hat{Y}) \quad (22)$$

$$\hat{X} = z_s \left( \frac{x_o}{z_o} - \frac{x_g}{z_g} \right) + \frac{z_s}{z_I} X, \quad \hat{Y} = z_s \left( \frac{y_o}{z_o} - \frac{y_g}{z_g} \right) + \frac{z_s}{z_I} Y \quad (23)$$

$$C_1 = C \exp \left[ -ik \left( \frac{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2}{2z_s} + \frac{X^2 + Y^2}{2z_I} \right) \right]$$

Как видно из формул (22), (23) при голографировании в гауссовых пучках плоского предмета основное изображение подобно самому предмету, но имеет измененный масштаб, определяемый коэффициентом  $\frac{z_s}{z_I}$ , и смещено по сравнению с голографированием в сферических волнах на величину  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вдоль осей  $ox$  и  $oy$  от оси  $oz$ , где

$$\Delta x = z_I \left( \frac{x_o}{z_o} - \frac{x_g}{z_g} \right), \quad \Delta y = z_I \left( \frac{y_o}{z_o} - \frac{y_g}{z_g} \right) \quad (24)$$

Масштаб и величина смещения зависят от параметров волновых пучков. Голографирование в волновых пучках по сравнению с голографированием в сферических волнах изменяет масштаб и величину смещения изображения вследствие того, что изменяется расстояние от изображения до голограммы (теперь это расстояние  $z_I$ ). Если выполняется условие  $R_o = R_g$ , то  $z_I = z_s$  т.е. расстояние до изображения равно расстоянию до предмета. При этом масштабные изменения исчезают.

Если выполняется условия

$$\frac{x_o}{z_o} = \frac{x_g}{z_g}, \quad \frac{y_o}{z_o} = \frac{y_g}{z_g} \quad (25)$$

то смещение изображения от оси  $oz$  отсутствует. Условия (25) означают, что оси опорного и восстанавливающего волновых пучков совпадают.

#### 4. Анализ результатов

Радиусы кривизны волновых поверхностей опорного и восстанавливающего волновых пучков в плоскости голограммы удобно записать в виде

$$R_o = z_o \sigma_o, \quad R_g = z_g \sigma_g \quad (26)$$

$$\text{где} \quad \sigma_o = 1 + \frac{\pi^2 \rho_{oo}^4}{\lambda^2 z_o^2}, \quad \sigma_g = 1 + \frac{\pi^2 \rho_{og}^4}{\lambda^2 z_g^2} \quad (27)$$

Параметры  $\sigma_o$  и  $\sigma_g$  и определяют отличия в голографировании в волновых пучках от голографирования в сферических и плоских волнах. Произведем оценку этих параметров. При  $z_o = 1$  м,  $\lambda = 6,28 \cdot 10^{-7}$  м,  $\rho_{oo} = 0,45$  мм параметр

$\sigma=2$ . Таким образом даже без использования увеличения расходимости волновых пучков параметры  $\sigma_o$  и  $\sigma_g$  заметно отличны от единицы.

Как видно из формул (14), (19) при голографировании в поле сферических волн основное изображение находится на расстоянии, равном расстоянию до объекта, при условии  $z_o = z_g$ . В случае гауссовых пучков наряду с этим равенством должно быть выполнено еще одно  $\sigma_o = \sigma_g$ , которое можно переписать в виде

$$\frac{\rho_{oo}^2}{z_o^2} = \frac{\rho_{og}^2}{z_g^2} \quad (28)$$

т.е. должно быть  $\rho_{oo} = \rho_{og}$ , т.е. должны совпадать радиусы пятен поля опорного и восстанавливающего пучков в горловинах.

Изменение продольной координаты изображения по сравнению с продольной координатой предмета описывается параметром

$$\gamma = \frac{z_s}{z_I} = 1 - z_s \left( \frac{1}{\sigma_g z_g} - \frac{1}{\sigma_o z_o} \right) \quad (29)$$

Параметр  $\gamma$  одновременно является и масштабным множителем при голографировании плоского предмета. Из формулы (26) видно, что если  $\sigma_g z_g \leq \sigma_o z_o$ , то масштабный множитель  $\gamma$  меньше единицы, в противном случае он больше единицы и линейные размеры изображения превосходят линейные размеры предмета.

В случае выполнения только одного равенства  $\sigma_o = \sigma_g = \sigma$  параметр  $\gamma$  определяется формулой

$$\gamma = 1 + \frac{a}{\sigma} \quad (27)$$

где

$$a = z_s \left( \frac{1}{z_g} - \frac{1}{z_o} \right)$$

Графики зависимостей  $\gamma$  от  $\sigma$  при различных  $a$  приведены на рисунке 9.

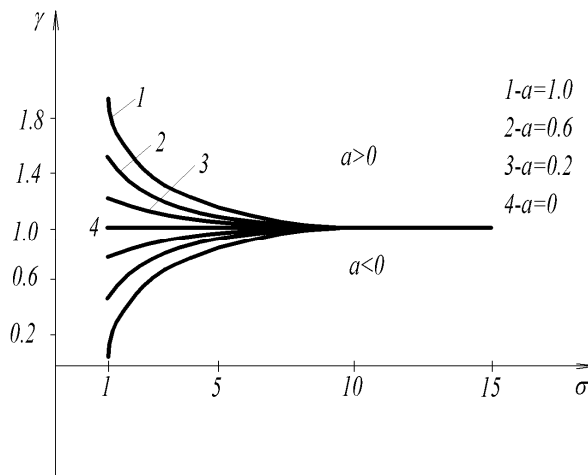


Рисунок 9



Случай  $\sigma = 1$  соответствует голографированию в сферических волнах,  $\sigma = \infty$  - в плоских волнах. В этих двух предельных случаях формулы (25), (27) переходят в аналогичные работы [21]. При  $a/\sigma = 0,05$  параметр  $\gamma$  отличается от единицы на 5%, т. е. ошибка в определении продольной координаты по формуле, соответствующей плоским волнам не превосходит 5%. Таким образом, случай  $a/\sigma = 0,05$  практически соответствует случаю голографирования в плоских волнах. Голографирование в волновых пучках по параметру  $\sigma$  занимает всю область между отмеченными выше двумя предельными случаями и, следовательно, по своему описанию является более общим.

## 2.7 Дифракция гауссового пучка на тонкой голографической решетке

В случае, если предметная и опорная волны являются плоскими, амплитудное пропускание тонкой голограммы определяется формулой [30]

$$\tau(x) = \tau_0 + 2\tau_1 \cos 2\pi \frac{x}{a} \quad (1)$$

При этом голограмма представляет собой дифракционную решетку с периодом  $a$ , отличительной особенностью которой является то обстоятельство, что ее пропускная способность в направлении, перпендикулярном к штрихам, изменяется по косинусоидальному закону.

Пусть на голограмму с амплитудным пропусканием, описываемым формулой (1), и находящейся в плоскости  $z = 0$ , вдоль оси  $oz$  падает гауссовый волновой пучок, горловина которого отстоит на расстоянии  $l$  от голограммы, а распределение поля в горловине описывается функцией [29]

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{kx^2}{2A_0}\right) \quad (2)$$

где параметр  $A_0 = k\rho_0^2/2$  определяет радиус пятна поля  $\rho_0$  в горловине,  $k = 2\pi/\lambda$ . Распределение поля волнового пучка в плоскости голографической решетки описывается формулой

$$\psi_l(x) = \sqrt{A_0/V_l} \exp\left(-\frac{kx^2}{2V_l}\right) \quad (3)$$

где

$$V_l = A_0 + il \quad (4)$$

Введя фазу комплексного параметра  $V_l$  по формуле

$$u_l = \arctg \frac{l}{A_0} \quad (5)$$

формулу (3) можно преобразовать к виду

$$\psi_l(x) = \sqrt{\frac{A_0}{A_l}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2A_l} + i\frac{kx^2}{2R_l} - i\frac{l}{2}u_l\right) \quad (6)$$

где  $R_l$  - радиус кривизны волновой поверхности пучка, определяемый по формуле

$$R_l = l \left( 1 + \frac{A_0^2}{l^2} \right) \quad (9)$$

$A_l$  - значение параметра  $A$  на расстоянии  $l$  от горловины. Он определяет радиус пятна поля  $\rho_l$  в данном сечении пучка

$$A_l = \frac{k\rho_l^2}{2} = A_0 \left( 1 + \frac{l^2}{A_0^2} \right) \quad (10)$$

Функцию распределения поля гауссового волнового пучка в плоскости дифракционной решетки разложим в интеграл Фурье

$$\psi_l(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp(ik\xi x) d\xi \quad (11)$$

где

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi A_0}{V_l}} \exp\left(-\frac{kV_l \xi^2}{2}\right) \quad (12)$$

Прошедшее сквозь решетку поле можно записать в виде

$$\psi(x, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) A(\alpha, \xi) \exp\left[ik\left(\alpha + \xi\right)x + \sqrt{1 - (\alpha + \xi)^2} z\right] d\xi \quad (13)$$

Решение (13) удовлетворяет волновому уравнению. Передаточная функция  $A(\alpha, \xi)$  в приближении Фраунгофера [25] имеет вид

$$A(\alpha, \xi) = \int_{-Na/2}^{Na/2} \tau(x') \exp[ik(\alpha + \xi)x'] dx' \quad (14)$$

где  $\alpha = x/z$  - угол, под которым из начала координат видна точка наблюдения,  $N$  - число щелей в дифракционной решетке. Интеграл (14) вычисляется в явном виде и имеет вид

$$A(\alpha, \xi) = \sum_{m=-1}^{m=1} A_m(\alpha, \xi) \quad (15)$$

где

$$A_m(\alpha, \xi) = \tau_m \frac{\sin\left[k(\alpha + \xi) + m\frac{2\pi}{a}\right] a \frac{N}{2}}{\left[k(\alpha + \xi) + m\frac{2\pi}{a}\right] a \frac{N}{2}} \quad (16)$$

Функция  $F(\xi)$  имеет для гауссового пучка острый локальный максимум при  $\xi = 0$ , вследствие чего, подынтегральную функцию  $A(\alpha, \xi)$  можно вынести из под знака интеграла при  $\xi = 0$ . Тогда поле, прошедшее сквозь решетку, запишется в виде

$$\psi(x, z) = A(\alpha) G(\alpha, x, z) \quad (17)$$

где

$$A(\alpha) = A(\alpha, \xi) \Big|_{\xi=0}$$

$$G(\alpha, x, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp i k \left[ (\alpha + \xi)x + \sqrt{1 - (\alpha + \xi)^2} z \right] d\xi \quad (18)$$

Таким образом, действие синусоидальной решетки существенно отличается от действия щелевой решетки. В то время как щелевая решетка имеет  $2n+1$  лепестков (пространственных гармоник), где  $n$  - целая часть отношения  $a/\lambda$ , дифракционная картина синусоидальной решетки имеет только три лепестка, максимумы которых наблюдаются под углами  $\theta_m$

$$\sin \theta_m = \alpha_m = m \frac{\lambda}{a} \quad (19)$$

Форма лепестков определяется в основном функцией  $G(\alpha, x, z)$ , а функция  $A(\alpha)$  определяет направление на максимум. Поэтому в формулах (17), (18) параметр  $\alpha$  можно положить равным  $\alpha_m$ , в результате чего дифракционное поле запишется в виде

$$\psi(x, z) = \sum_{m=-1}^1 A_m(\alpha_m) \psi_m(x, z) \quad (20)$$

$$\text{где} \quad \psi_m(x, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp i k \left[ (\alpha_m + \xi)x + \sqrt{1 - (\alpha_m + \xi)^2} z \right] d\xi \quad (21)$$

$$A_m(\alpha_m) = \tau_m$$

Раскладывая  $\sqrt{1 - (\alpha_m + \xi)^2}$  в ряд по  $\xi$  с точностью до квадратичных членов, для случая, когда на пятне пучка укладывается много периодов решетки, интеграл (21) можно вычислить в явном виде. В результате получаем

$$\psi_m(x_m, z_m) = \sqrt{\frac{A_0(1 - \alpha_m^2)}{V_m}} \exp \left[ -\frac{kx_m^2}{2V_m} + ik(l + z_m) \right] \quad (22)$$

$$\text{где} \quad V_m = V_l(1 - \alpha_m^2) + i \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} \quad (23)$$

и введена лучевая система координат

$$x_m = \sqrt{1 - \alpha_m^2} x - \alpha_m z, \quad z_m = \alpha_m x + \sqrt{1 - \alpha_m^2} z \quad (24)$$

С учетом формулы (4), формула (23) перепишется в виде

$$V_m = A_0(1 - \alpha_m^2) + iB_m \quad (25)$$

$$\text{где} \quad B_m = l(1 - \alpha_m^2) + \frac{z}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} \quad (26)$$

Вводя фазу комплексного параметра  $V_m$  по формуле

$$u_m = \operatorname{arctg} \frac{B_m}{A_0(1 - \alpha_m^2)} \quad (27)$$

формулу (22) можно преобразовать к виду

$$\psi_m(x_m, z_m) = \sqrt{\frac{A_0}{A_m}} \exp \left[ -\frac{kx_m^2}{2A_m} + i \frac{kx_m^2}{2R_m} + ik(l + z_m) - ik \frac{u_m}{2} \right] \quad (28)$$

где

$$A_m = A_0(1 - \alpha_m^2) \left[ 1 + \frac{B_m^2}{A_0^2(1 - \alpha_m^2)} \right] \quad (29)$$

$$R_m = B_m \left[ 1 + \frac{A_0^2(1 - \alpha_m^2)}{B_m^2} \right] \quad (30)$$

Таким образом, дифракционное поле при дифракции гауссового пучка на густой решетке с синусоидальной пропускной способностью представляет собой три гауссовых волновых пучка

$$\psi(x, z) = \sum_{m=-1}^1 \tau_m \psi_m(x_m, z_m) \quad (31)$$

Направление распространения дифракционных пучков определяется формулой (19), т.е. той же формулой, что и для плоских волн.

Качество голографического изображения характеризуется несколькими параметрами. Одним из важнейших является дифракционная эффективность голограммы  $\eta$ , определяющая отношение интенсивности дифрагированной волны с  $m=1$  к интенсивности падающей волны.

В нашем случае дифракционная эффективность

$$\eta = |\tau_1|^2 \quad (32)$$

т.е. остается такой же, как и для плоских волн.

## ГЛАВА 3. КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ И РЕШЕТКАМИ

### 3.1. Квазиоптический открытый резонатор с диэлектрическим слоем и решетками

Квазиоптические открытые резонаторы с изотропным или анизотропным диэлектрическим слоем исследованы в ряде работ [26-28]. В [29] рассмотрен открытый резонатор с искусственным диэлектриком – двойной ленточной решеткой, в [30] – плоскопараллельный резонатор с решеткой из брусьев. В теоретических исследованиях таких резонаторов не учитывается характер преобразования параметров резонансного поля при прохождении неоднородности, что приводит к громоздким формулам, необходимости численного исследования. В настоящей работе с учетом характера изменения параметров резонансного поля при прохождении через пластину диэлектрика получено простое дисперсионное уравнение для резонатора и его аналитическое решение, позволяющее выяснить некоторые особенности таких резонаторов.

#### *1. Прохождение волнового пучка через диэлектрический слой*

Пусть на диэлектрический слой с плоскими параллельными границами толщиной  $2h$  и показателем преломления  $n_2$  (область 2) вдоль оси  $oz$  падает гауссовый волновой пучок с горловиной в плоскости  $z = -\Delta$  (рис. 10). Область  $z < -h$  (область 1) заполнена средой с показателем преломления  $n_1$ , область  $z > h$  (область 3) – средой с  $n_3$ . Горловина падающего волнового пучка может находиться в любой из этих трех областей. Пучки, распространяющиеся вдоль оси  $oz$ , будем называть прямыми, а пучки с такими же параметрами, но распространяющиеся в противоположном направлении, – обратными (по аналогии с общепринятыми терминами – прямая и обратная волны).

При прохождении через плоскую границу раздела двух однородных сред и отражении от них структура гауссовых волновых пучков сохраняется, но их параметры при этом изменяются. Поперечная компонента электрического поля прямого пучка в любой из областей имеет вид

$$E_j^{(A)} = a_j W_j(x, z) \exp[i\Phi_j(z)], \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где

$$W_j(x, z) = [1 + g_j^2(z)]^{-1/4} \Psi_p(x, z) \exp[-i(p + 1/2)u_j(z)],$$
$$\Psi_p(x, z) = H_p(\sqrt{k_j/A_j(z)}x) \exp[-k_j x^2 / 2V_j(z)],$$

$a_j$  – комплексные амплитуды,  $\Phi_j(z)$  – фаза волнового пучка,  $V_j(z)$  – параметр пучка, называемый вариансом [4],  $g_j(z) = \text{Im}V_j(z)/\text{Re}V_j(z)$  – волновой параметр пучка,  $u_j(z) = \text{arctg } g_j(z)$  – фаза варианса,  $p$  – порядок полинома

Эрмита  $H_p(x)$ ,  $\Psi_p(x, z)$  - функция Гаусса-Эрмита,  $k_j = k_0 n_j$  и  $k_0 = \omega/c$  - волновые числа в  $j$ -й среде и в вакууме.

Варианс  $V_j(z)$  является основным параметром гауссового волнового пучка, определяющим остальные его характеристики:

$$A_j(z) = \text{Re} V_j(z) [1 + g_j^2(z)],$$

$$R_j(z) = \text{Im} V_j(z) [1 + g_j^{-2}(z)]$$

Параметр  $A_j(z) = k_j w_j^2(z)/2$  определяет радиус  $w_j(z)$  пятна поля пучка,  $R_j(z)$  - радиус кривизны волновой поверхности пучка, фаза  $u_j(z)$  комплексного параметра  $V_j(z)$  определяет дополнительный набег фазы волнового пучка, обусловленный кривизной его фазовой поверхности.

В области  $j = m$ , где находится горловина пучка, фаза и вариант пучка определяются формулами

$$\Phi_m(z) = k_m(z - \Delta), \quad V_m(z) = n_m A_0 + i(z - \Delta), \quad (2)$$

где,  $A_0 = \frac{k_0 w_0^2}{2}$ ,  $w_0$  - радиус пятна поля в горловине пучка.

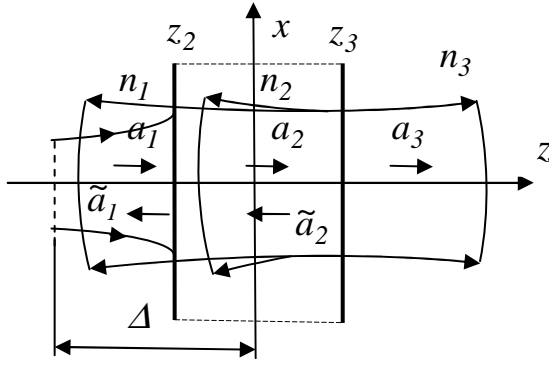


Рисунок 10

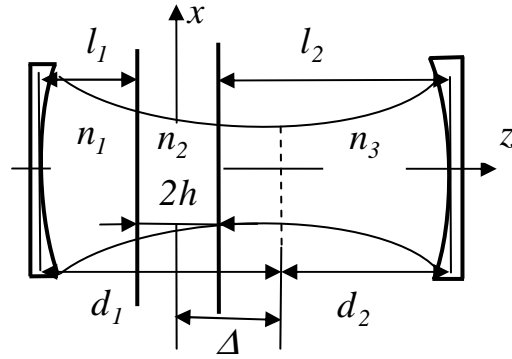


Рисунок 11

Фаза и вариант пучка в произвольной области связаны с их значениями на границе области следующими соотношениями:

$$\Phi_j(z) = \Phi_{j-1}(z_j) + k_j(z - z_j), \quad V_j(z) = V_j(z_j) + i(z - z_j), \quad j > m \quad (3)$$

$$\Phi_{j-1}(z) = \Phi_j(z_j) + k_{j-1}(z - z_j), \quad V_{j-1}(z) = V_{j-1}(z_j) + i(z - z_j), \quad j < m \quad (4)$$

где  $z_j$  - координаты границы раздела между  $(j-1)$  и  $j$ -й средами ( $z_2 = -h, z_3 = h$ ).

На границах раздела сред должны выполняться условия непрерывности для функций  $W_j(x, z)$  распределения поля в пучках и для фаз  $\Phi_j(z)$ . Из формул (3), (4) видно, что условие непрерывности для фаз выполняются автоматически, а из непрерывности функций  $W_j(x, z)$  следуют соотношения, описывающие преобразование варианта пучка при переходе через границу раздела:

$$V_j(z) = (n_j/n_{j-1}) V_{j-1}(z_j), \quad j > m,$$

$$V_{j-1}(z) = (n_{j-1}/n_j)V_j(z_j), \quad j < m, \quad (5)$$

Коэффициенты преобразования для волнового пучка при переходе через границу раздела совпадают с таковыми для плоской волны той же поляризации. Поле прямого пучка, отраженного от границы раздела  $z = z_j$ , записывается в виде

$$\tilde{E}_j^{(A)} = \tilde{a}_j \tilde{W}_j(x, z) \exp[i\tilde{\Phi}(z)], \quad (6)$$

где

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \Phi_j(z_{j+1}) - k_j(z - z_{j+1}), \quad \tilde{V}_j(z) = V_j(z_{j+1}) - i(z - z_{j+1})$$

Для записи поля обратного пучка надо выполнить операцию комплексного сопряжения в формуле (1) с заменой амплитуд  $a_j$  прямых пучков на амплитуды  $b_j$  обратных.

## 2. Поле открытого резонатора с диэлектрическим слоем

Для простоты будем рассматривать открытый резонатор с вогнутыми зеркалами радиусами кривизны  $R_1, R_2$  и слоем однородного изотропного диэлектрика между ними (геометрия резонатора приведена на рис. 11) в двумерном случае. Резонансное колебание открытого резонатора представляет собой два распространяющихся навстречу друг другу гауссовых волновых пучка (прямой  $A$  и обратный  $B$ ). Для нахождения резонансного колебания необходимо по заданному пучку  $A$  найти пучок  $B$ , который в сумме с первым образует стоячую волну во всех трех областях с узловыми поверхностями при  $z_1 = -(l_1 + h)$  и  $z_4 = l_2 + h$ , совпадающими с поверхностями зеркал. Для этого при  $z = z_1$  и  $z = z_4$  радиусы кривизны волновых поверхностей пучков  $A$  и  $B$  должны совпадать с радиусами кривизны зеркал, а тангенциальная компонента электрического поля должна быть равной нулю. Из первого условия получаем следующие формулы для координаты горловины

$$\Delta = D_j + \delta_j, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= n_1 D^{-1} [n_1 n_3^{-1} (R_2 - l_{22}) l_{22} - n_1^{-1} n_3 (R_1 - l_{11}) l_{11}], \\ D_2 &= n_2 D^{-1} [n_1 n_3^{-1} (R_2 - l_{21}) l_{21} - n_1^{-1} n_3 (R_1 - l_{11}) l_{11}], \\ D_3 &= n_3 D^{-1} [n_1 n_3^{-1} (R_2 - l_2) l_2 - n_1^{-1} n_3 (R_1 - l_{12}) l_{12}] \\ D &= n_3 (R_1 - 2l_{11}) + n_1 (R_2 - 2l_{21}), \\ l_{1j} &= l_1 + j n_1 n_2^{-1} h \\ l_{2j} &= l_2 + j n_2^{-1} n_3 h, \quad (j = 1, 2), \\ \delta_1 &= -h, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = h. \end{aligned}$$

Параметры  $D_1$  и  $D_3$  определяют координату горловины резонансного волнового пучка в соответствующей области, отсчитываемую для каждой из областей от поверхности слоя, ограничивающей эту область,  $D_2$  - координату

горловины для области 2, отсчитываемую от начала координат. При  $D_1 < 0$  горловина резонансного пучка находится в области 1, при  $D_3 > 0$  - в области 3, при  $|D_2| < h$  - в области 2. Одновременное выполнение двух или трех этих условий невозможно.

Размер пятна поля резонансного колебания в горловине определяется параметрами

$$\begin{aligned} A_{01} &= n_1^{-1} [(R_1 - l_1 - D_1)(l_1 + D_1)]^{1/2}, \quad D_1 < 0, \\ A_{03} &= n_3^{-1} [(R_2 - l_2 + D_3)(l_2 - D_3)]^{1/2}, \quad D_3 > 0 \\ A_{02} &= n_1^{-1} [(R_{11} - l_{11} - n_1 n_2^{-1} D_2)(l_{11} + n_1 n_2^{-1} D_2)]^{1/2} = \\ &= n_3^{-1} [(R_2 - l_{21} + n_2^{-1} n_3 D_2)(l_{21} - n_2^{-1} n_3 D_2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Расстояние  $d_1$  от горловины до первого зеркала и  $d_2$  - до второго связаны с координатой горловины простыми соотношениями:

$$d_1 = l_1 + h + \Delta, \quad d_2 = l_2 + h - \Delta. \quad (9)$$

При  $h=0$  формулы (7)-(9) определяют положение горловины и размер пятна поля в ней для резонатора со скачком диэлектрической проницаемости при  $z=0$ . При  $h=0$  и  $n_1 = n_3 = 1$  эти формулы переходят в хорошо известные для незаполненного резонатора.

Поле резонансного колебания в области 1 запишется в виде

$$E_1 = E_1^{(A)} + \tilde{E}_1^{(A)} + E_1^{(B)},$$

а в области 3 – в виде

$$E_3 = E_3^{(A)} + \tilde{E}_3^{(B)} + E_3^{(B)}.$$

Для обратного пучка  $\tilde{E}_3^{(B)}$  параметры  $\tilde{\Phi}_3$  и  $\tilde{V}_3$  определяются формулами

$$\tilde{\Phi}_3(z) = \Phi_3^*(z_3) + ik_3(z - z_3), \quad \tilde{V}_3(z) = V_3^*(z_3) + i(z - z_3).$$

Амплитуды прямого, обратного и отраженных от слоя пучков в областях 1 и 3 связаны между собой соотношениями

$$\tilde{a}_1 = a_1 R_A, \quad a_3 = a_1 T_A, \quad \tilde{b}_3 = b_3 R_B, \quad b_1 = b_3 T_B.$$

Коэффициенты прохождения  $T_A$  и отражения  $R_A$  прямого пучка для диэлектрического слоя определяются формулами

$$T_A = 4Z_0^{-1}Z_2Z_3,$$

$$R_A = Z_0^{-1}[(Z_3 + Z_2)(Z_2 - Z_1) + (Z_3 - Z_2)(Z_2 + Z_1)\exp(i4k_2h)],$$

$$Z_0 = (Z_3 + Z_2)(Z_2 + Z_1) + (Z_3 - Z_2)(Z_2 - Z_1)\exp(i4k_2h),$$

где  $Z_j = \sqrt{\mu_j / \varepsilon_j}$  - импедансы сред ( $j = 1, 2, 3$ ). Коэффициенты отражения  $R_B$  и прохождения  $T_B$  обратного пучка получаются из аналогичных формул для прямого пучка заменами  $Z_1 \rightarrow Z_3$ ,  $Z_3 \rightarrow Z_1$ .



### 3. Дисперсионное уравнение для резонатора с диэлектрическим слоем

Для получения дисперсионного уравнения необходимо положить  $E_I = 0$  при  $z = z_I$  и  $E_3 = 0$  при  $z = z_4$  и взять полученную систему уравнений при  $x = 0$ . Функции  $\Psi_p(x)$  при этом – константы (при нечетных  $p$  – нулевые константы). Сокращая на эти константы и решая полученную систему уравнений, имеем дисперсионное уравнение

$$(1 - X) \exp i\varphi - \exp(-i\varphi) = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} X &= 1 - T_A T_B [1 + \sigma_I(z_I) R_A \exp(i 2 k_0 n_I l_I)]^{-1} + \sigma_3(z_4) R_B \times \\ &\times \exp\{-i 2 [k_0 (n_I l_I + n_2 2h) + (p + 1/2) u_I(z_I)]\} \\ \sigma_j(z) &= (1 + g_j^2)^{1/4} (1 + \tilde{g}_j^2)^{-1/4} \exp\{-i(p + 1/2) \times [\tilde{u}_j(z) - u_j(z)]\}, \\ \varphi &= k_0 L - (p + 1/2) [u_3(z_4) - u_I(z_I)], \end{aligned}$$

$L = n_I l_I + n_2 2h + n_3 l_2$  и  $L_0 = l_I + 2h + l_2$  – оптическая и геометрическая длины резонатора.

Параметр  $\sigma_I(z)$  учитывает дифракцию пучка  $a_I$  на пути  $2l_I$ , параметр  $\sigma_3(z_4)$  – дифракцию пучка  $b_3$  на пути  $2l_2$ . При  $R_A = R_B = -1$  и  $T_A = T_B = 0$  уравнение (10) распадается на три уравнения, соответствующие двум плосковогнутым и одному плоскопараллельному резонаторам.

При малых коэффициентах отражения резонансного пучка от диэлектрического слоя (как правило, реализующихся на практике) возмущение, вносимое слоем,  $|X| \ll 1$  и дисперсионное уравнение (10) может быть решено методом возмущений. Нулевым приближением для уравнения (10) является решение этого уравнения при  $X = 0$ , которое имеет вид

$$k_0^{(0)} = L^{-1} \{q\pi + (p + 1/2) [u_3(z_4) - u_I(z_I)]\}, \quad (11)$$

где  $q$  – натуральное число. Нулевое приближение (11) учитывает преобразование резонансного пучка при прохождении через диэлектрический слой, но не учитывает отражений от слоя. При  $h = 0$  и  $n_I = n_3 = 1$  формула (11) определяет резонансные частоты незаполненного резонатора, при  $h = 0$  – резонансные частоты резонатора со скачком диэлектрической проницаемости в плоскости  $z = 0$  без учета отражений от границы раздела сред.

Первое приближение решения уравнения (10) в рамках теории возмущений определяется формулой

$$k_0^{(1)} = k_0^{(0)} + L^{-1} \arctg \frac{\text{Im } X}{1 - \text{Re } X}, \quad (12)$$

где в формулах для  $X$  полагается  $k_0 = k_0^{(0)}$ .

Формула (12) учитывает наличие отраженных от слоя волн и позволяет рассчитать резонансные частоты резонатора с диэлектрическим слоем с достаточной для практики точностью. На рисунке 12 приведены зависимости резонансной длины волны  $\lambda_0^{(1)}$  в вакууме, вычисленной в первом приближении,

от расстояния  $l_1$  между плоским зеркалом и диэлектрическим слоем в плосковогнутом резонаторе ( $R_2 = 110$  мм,  $L_0 = 60$  мм,  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $n_2 = 3,85$ ) при различных толщинах слоя  $2h$ .

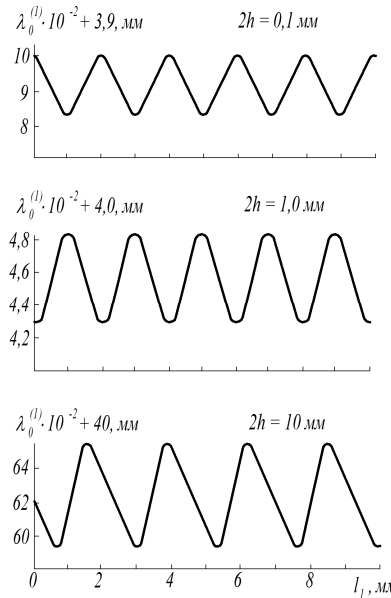


Рисунок 12

Видно, что при изменении расстояния  $l_1$  резонансная длина волны совершает небольшие осцилляции около ее среднего значения, обусловленные интерференцией резонансного пучка и пучков, отраженных от слоя. Расположение слоя, соответствующее синфазному сложению отраженного слоем пучка с резонансным (основным) пучком открытого резонатора, обеспечивает минимальные, а противофазному сложению – максимальные значения расстройки. Результаты расчетов по формуле (12) хорошо согласуются с результатами работы [26]. Решение дисперсионного уравнения в приближении выше первого имеет гораздо более громоздкий вид и, как показывают расчеты, для практических целей достаточно решения в первом приближении.

Нулевое приближение (11) решения дисперсионного уравнения для резонатора с диэлектрическим слоем позволяет определить условие стабильности колебаний в таком резонаторе. Легко показать, что независимо от того, в какой из областей расположена горловина резонансного колебания,

$$u_3(z_4) - u_1(z_1) = \arccos \sqrt{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2}, \quad (13)$$

где

$$\tilde{g}_j = g_j + \gamma_j, \quad g_j = 1 - L_0 / R_j, \quad (j = 1, 2)$$

$$\gamma_1 = \frac{l_2}{R_1} \left( 1 - \frac{n_1}{n_3} \right) + \frac{2h}{R_1} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right),$$

$$\gamma_2 = \frac{l_1}{R_2} \left( 1 - \frac{n_3}{n_1} \right) + \frac{2h}{R_2} \left( 1 - \frac{n_3}{n_2} \right).$$

Условие стабильности колебаний в резонаторе с диэлектрическим слоем имеет вид

$$0 < \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 < 1 \quad (14)$$

При  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  (14) переходит в условие стабильности незаполненного резонатора. На координатной плоскости  $(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$  области стабильности колебаний для резонатора с диэлектрическим слоем имеют такой же вид, как и для пустого резонатора на координатной плоскости  $(g_1, g_2)$ . Ввиду того, что  $\gamma_1$  зависит от  $R_1$ , а  $\gamma_2$  от  $R_2$ , на координатной плоскости  $(g_1, g_2)$  конфигурация областей стабильности резонатора с диэлектрическим слоем имеет гораздо более сложный вид по сравнению с таковой для пустого резонатора и может быть построена только при заданных значениях  $L_0, R_1, R_2$ . Таким образом, возможны случаи, когда пустой резонатор стабилен, а резонатор с диэлектрическим слоем – нестабилен. Это объясняется тем, что достаточно толстые диэлектрические слои способны заметно изменять кривизну волновой поверхности резонансного пучка, что, в конечном итоге, может привести к нестабильности резонатора.

#### 4. Дисперсионное уравнение для резонатора с решетками

Дисперсионное уравнение (10) и формулы (7)–(9) применимы и для случая, когда по границам раздела  $z = \pm h$  расположены густые ( $2w_0/l \gg 1$ ,  $l$  – период,  $w_0$  – радиус пятна поля) плоские решетки, например резонаторы с двойной ленточной и проволочной решетками. При этом под  $R, T$  в формуле (10) понимаются коэффициенты отражения и прохождения для соответствующей двойной плоской решетки, расположенной в общем случае на границах раздела трех сред. Положив в формуле (10)  $h=0$ , получим дисперсионное уравнение для резонатора с плоской решеткой на границе раздела двух сред, если под  $R$  и  $T$  будем понимать соответствующие коэффициенты для решетки, находящейся на границе раздела двух сред.

Полученные результаты легко трансформировать на случай, когда диэлектрический слой 2 заменен объемной решеткой с волновыми каналами, параллельными оси резонатора, при условии, что в каналах распространяется только одна волноводная волна. Это, например, решетка из брусьев прямоугольного поперечного сечения, ножевая решетка. В этом случае в формулах для  $g_j$  надо положить  $h=0$ , так как на расстоянии  $2h$  (внутри решетки) происходит волноводное распространение резонансного волнового пучка, который при прохождении через решетку не расширяется. При этом в формулах (3)–(5) для вариантов надо опустить индекс 2, как не существующий, а под  $n_2$  понимается теперь показатель преломления вещества, заполняющего волноводные каналы решетки. Под расстоянием  $d_j$  при этом понимается расстояние от горловины резонансного пучка до зеркал за вычетом  $2h$ . То же

самое относится и к величине  $\Delta$ , при этом  $\Delta = D_j$  и отсчитывается от плоскости решетки для каждой из областей (рис. 13).

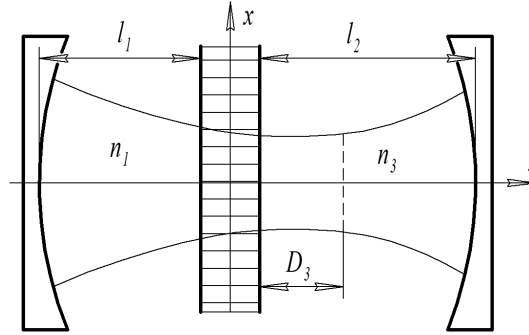


Рисунок 13

При толщине решетки  $2h$ , удовлетворяющей условию резонанса в волноводных каналах,  $R_{A,B} = 0, T_A = \exp i\varphi_A, T_B = \exp i\varphi_B$ , и дисперсионное уравнение (10) принимает вид

$$\exp\left\{i\left[\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)\right]\right\} - \exp\left\{-i\left[\varphi + \frac{1}{2}(\varphi_A + \varphi_B)\right]\right\} = 0.$$

При  $n_1 = n_3 = n$

$$\begin{aligned}\varphi &= k_0(nL_1 + n_2 2h) - (p + 1/2)[u_3(z_4) - u_1(z_1)], \\ u_1(z_1) &= -\arctg\{L_1(R_2 - L_1)/[(R_1 - L_1)(R_1 + R_2 - L_1)]\}^{1/2}, \\ u_3(z_4) &= \arctg\{L_1(R_1 - L_1)/[(R_2 - L_1)(R_1 + R_2 - L_1)]\}^{1/2},\end{aligned}$$

где  $L_1 = l_1 + l_2$ . В полученные формулы величины  $l_1$  и  $l_2$  входят только в виде суммы, поэтому при заданном  $L_1$  резонансная длина волны не зависит от положения решетки в резонаторе, что совпадает с результатами численного счета работы [27]. Если  $n_1 \neq n_3$ , то разность дополнительных фазовых набегов  $u_3(z_4) - u_1(z_1)$  и оптическая длина резонатора зависят от  $l_1$  и  $l_2$  и поэтому резонансная длина волны зависит от положения решетки в резонаторе.

Аналогично могут быть получены дисперсионные уравнения для резонаторов с многослойными диэлектрическим заполнением и решетками.

### 3.2 Квазиоптический открытый резонатор с анизотропной пластиной

В настоящее время теоретически и экспериментально исследован открытый резонатор (ОР) с изотропной пластиной диэлектрика [28]. При внесении в резонатор анизотропного слоя, вследствие явления двойного лучепреломления, колебания в ОР могут быть возбуждены как на обыкновенных так и на необыкновенных волнах. При этом спектр колебаний ОР расщепляется за счет снятия поляризационного вырождения.

Для анализа колебаний на обыкновенных волнах (обыкновенные колебания ОР) полностью применимы результаты, развитые для ОР с изотропной пластиной диэлектрика. Для анализа колебаний на необыкновенных волнах (будем в

дальнейшем называть их необыкновенными колебаниями) надо предварительно ответить на два вопроса: как изменяются коэффициенты отражения и прохождения и варианты волновых пучков резонансных колебаний на необыкновенных волнах в сравнении с аналогичными для обыкновенных волн. С этой целью рассмотрим падение плоской волны на плоскопараллельный слой одноосного кристалла. Пусть плоская линейно поляризованная электромагнитная волна нормально падает на слой одноосного кристалла, оптическая ось  $\vec{c}$  которого составляет угол  $\varphi$  с нормалью к границе раздела (см. рис. 14 )

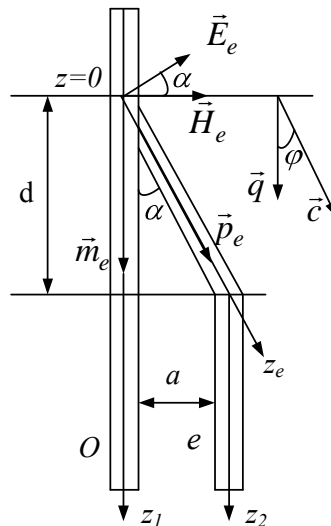


Рисунок 14

Тензор диэлектрической проницаемости кристалла имеет вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{pmatrix}$$

где  $\varepsilon_e$  - диэлектрическая проницаемость в направлении оптической оси кристалла,  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость в направлении, перпендикулярном к оптической оси кристалла.

Известно, что если вектор  $\vec{E}$  падающей волны перпендикулярен главной плоскости падения, проведенной через волновой вектор падающей волны и оптическую ось кристалла, то преломленная в кристалле волна будет обыкновенной [9]. Если вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  падающей волны лежит в главной плоскости падения, то преломленная в кристалле волна будет необыкновенной. В связи с этим разобьем падающую линейно поляризованную волну на две поляризации – с вектором  $\vec{E}$  в главной плоскости падения и перпендикулярным к ней – и рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{E}$  лежит в главной плоскости падения ( т.е. преломленная волна необыкновенная ).

Вектор  $\vec{E}$  волны в различных областях определяется формулами

$$\vec{E}_i = \bar{x}_0 B_i \exp(ik_i z) - \text{ для падающей волны,} \quad (1)$$

$$\vec{E}_{ie} = -B_{ie}\varepsilon_0 [\vec{p}_e [\vec{m}_e \vec{c}]] \exp(ik_{ie}z) - \text{для преломленной} \quad (2)$$

необыкновенной волны

где

$\vec{k}_i = k\vec{m}_i$  - волновой вектор падающей волны,

$\vec{k}_e = k\vec{m}_e$  - волновой вектор преломленной волны,

$k = \omega/c$ ,  $c$  - скорость света.

Векторы  $\vec{m}_i$  и  $\vec{m}_e$  называются векторами волновой рефракции и определяются формулами

$$\vec{m}_i = n_i \vec{n}_i, \quad \vec{m}_e = n_e \vec{n}_e.$$

Здесь  $\vec{n}_i$  и  $\vec{n}_e$  -единичные волновые нормали падающей и преломленной необыкновенной волн,  $n_i$ -показатель преломления вещества, окружающего сверху и снизу слой кристалла,  $n_e$ -показатель преломления необыкновенной волны, определяемый формулой

$$n_e = \left[ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_e}{(\varepsilon_0 \sin^2 \varphi + \varepsilon_e \cos^2 \varphi)} \right]^{1/2} \quad (3)$$

В необыкновенной волне фаза распространяется вдоль вектора волновой рефракции  $\vec{m}_e$ , а поток энергии – вдоль вектора лучевой рефракции  $\vec{p}_e$ , определяемого формулой

$$p_e = \left[ \frac{\varepsilon_0^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_e^2 \cos^2 \varphi}{\varepsilon_0 \varepsilon_e (\varepsilon_0 \sin^2 \varphi + \varepsilon_e \cos^2 \varphi)} \right]^{1/2} \quad (4)$$

Вектор лучевой рефракции  $\vec{p}_e$  необыкновенной волны составляет с вектором волновой рефракции  $\vec{m}_e$  угол  $\alpha$ , который определяется формулой

$$\cos \alpha = \frac{\varepsilon_0 \sin^2 \varphi + \varepsilon_e \cos^2 \varphi}{[\varepsilon_0^2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_e^2 \cos^2 \varphi]^{1/2}} \quad (5)$$

Из формул (3),(4) и (5) для  $n_e$ ,  $p_e$  и  $\cos \alpha$  можно сделать вывод, что

$$p_e \cos \alpha = \frac{1}{n_e} \quad (6)$$

В необыкновенной волне вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}_e$  перпендикулярен вектору волновой рефракции  $\vec{m}_e$ , а вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}_e$  перпендикулярен вектору лучевой рефракции  $\vec{p}_e$ . Тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}_e$  необыкновенной волны равна

$$E_{ex} = E_e \cos \alpha \quad (7)$$

Подставляя сюда формулу (2) и учитывая формулу (6), получаем

$$E_{ex} = -B_e \varepsilon_0 \exp(ikn_e z) \quad (8)$$

т.е. получаем, что амплитуда тангенциальной составляющей не зависит от угла  $\varphi$  между направлением распространения волны и направлением оптической оси кристалла, как это имеет место и для обыкновенной волны.

Приравнивая тангенциальные компоненты полного электрического и магнитного полей на обеих поверхностях кристалла, получаем для коэффициентов отражения  $R_e$  и преломления  $T_e$  для необыкновенных волн формулы, которые полностью совпадают с аналогичными для обыкновенных волн, если в последних сделать замену  $n_0 \rightarrow n_e$ , т.е. показатель преломления обыкновенной волны заменить на показатель преломления необыкновенной волны.

Переходя от плоских волн к волновым пучкам, зависимость поля падающего волнового пучка от поперечной координаты  $x$  определяется формулой

$$E_i \approx \exp\left(-\frac{kn_i x^2}{2V_i(z)}\right) \quad (9)$$

Величина  $V_i(z)$ , определяемая формулой

$$V_i(z) = n_i A_0 + i(z + z_0) \quad (10)$$

называется вариансом волнового пучка,  $A_0 = \frac{kn_i w_0^2}{2}$ ,  $w_0$  - радиус пятна поля в горловине,  $z_0$  - расстояние от горловины до поверхности кристалла. Все геометрические параметры пучка – радиус пятна поля  $w$ , радиус кривизны фазового фронта  $R$  - неявным образом содержатся в варианте  $V_i(z)$ . Представляя  $V_i^{-1}(z)$  в виде

$$\frac{1}{V_i(z)} = \frac{2}{kn_i w_i^2} - i \frac{1}{R_i} \quad (11)$$

формула (9) преобразуется к виду

$$E_i \approx \exp\left(-\frac{x^2}{w_i^2} + \frac{ikn_i x^2}{2R_i}\right) \quad (12)$$

Для преломленного волнового пучка напряженность электрического поля определяется формулой

$$E_e \approx \exp\left[-\frac{kn_e (x - z \operatorname{tg} \alpha)^2}{2V_e(z)}\right] \quad (13)$$

где вариант  $V_e(z)$  необыкновенного пучка определяется той же формулой, что и для обыкновенного. с заменой  $n_0 \rightarrow n_e$

$$V_e(z) = \frac{n}{n_i} V_i(0) + iz \quad (14)$$

Отметим, что вариант преломленного необыкновенного пучка в кристалле изменяется не вдоль направления переноса энергии, определяемого уравнением  $x = z \operatorname{tg} \alpha$ , а вдоль направления изменения фазы (вдоль оси  $z$ ).

Для прошедшего необыкновенного напряженность  $E_{ei}$

$$E_{ei} \approx \exp \left[ - \frac{kn_i(x-a)^2}{2V_{ei}(z)} \right] \quad (15)$$

$$\text{с вариансом} \quad V_{ei}(z) = \frac{n_i}{n_e} V_e(d) + i(z-d) \quad (16)$$

где  $V_e(d)$  - значение варианта преломленного волнового пучка на второй границе раздела. Из формулы (15) видно, что прошедший необыкновенный волновой пучок распространяется параллельно прошедшему обыкновенному пучку, но его ось сдвинута на расстояние  $a = d \operatorname{tg} \alpha$  относительно оси обыкновенного пучка.

Таким образом, коэффициенты отражения, прохождения и варианты обыкновенного и необыкновенного пучков определяются одними и теми же формулами с заменой показателя преломления  $n_o$  на  $n_e$  [9]. Единственное отличие состоит в том, что прошедший необыкновенный волновой пучок смещен на расстояние  $a = d \operatorname{tg} \alpha$  относительно падающего в главной плоскости падения.

Поэтому, если центр одного из зеркал открытого резонатора так же сместить на расстояние  $a$  относительно оси резонатора в главной плоскости падения кристалла, то полученные для резонатора с изотропной пластиной диэлектрика результаты остаются справедливыми и для резонансных колебаний на необыкновенных волнах с единственной заменой  $n \rightarrow n_e$ , т. е. показатель преломления изотропного диэлектрика  $n$  надо заменить на показатель преломления  $n_e$  для необыкновенных волн. Конфигурация поля резонансного колебания и ход осевых волн показан на рисунке 15.

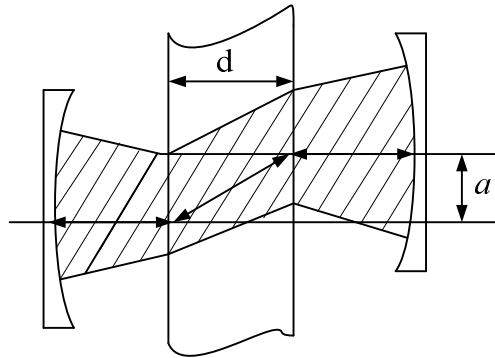


Рисунок 15

Для ОР, у которого одно из зеркал плоское, такое смещение зеркал, естественно, приводить не требуется [28]. У такого резонатора пятно поля резонансного колебания на необыкновенных волнах на плоском зеркале смещено на расстояние  $a = d \operatorname{tg} \alpha$  относительно оси резонатора. Конфигурация резонансного поля и ход осевых волн резонансного волнового пучка такого ОР показан на рисунке 16.



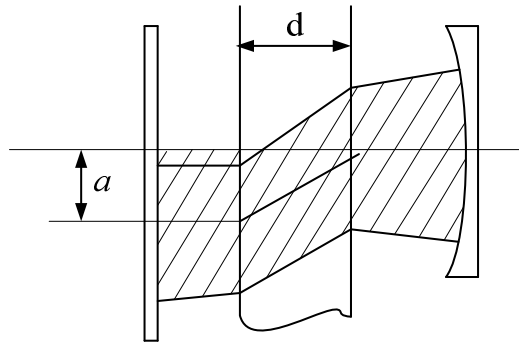


Рисунок 16

Если не смещать в резонаторе с вогнутыми зеркалами одно из зеркал в нем так же возможно возбудить необыкновенные резонансные колебания. Однако добротность таких колебаний будет низкой ввиду того, что из-за смещения оси прошедшего слой необыкновенного волнового пучка его волновая поверхность не совпадает с отражающей поверхностью зеркала, на которое он падает. Вследствие этого будут иметь место большие потери на преобразование необыкновенного волнового пучка в резонансное колебание.

Открытый резонатор с анизотропным диэлектриком возбужденный на необыкновенных волнах позволяет экспериментально измерить диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_e$  и потери необыкновенных волн в таком диэлектрике в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн. Для этого резонатор без диэлектрика возбуждают на одном из типов колебаний. Затем вносят диэлектрик и, контролируя тип колебания в резонаторе, смещают одно из зеркал вдоль оси резонатора на  $\Delta L$ , так чтобы снова добиться резонанса. Для необыкновенных волн надо еще на  $d \tan \alpha$  сместить одно из зеркал в направлении, перпендикулярном оси резонатора в главной плоскости кристалла. Относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_e$  тогда находится из формулы

$$\epsilon_e^2 = 1 + \frac{\Delta L}{d} \quad (18)$$

где  $\Delta L$  - подстройка резонатора.

Если не производить смещение одного из зеркал в поперечном направлении, то на необыкновенных волнах из-за низкой добротности резонатора резонансная кривая будет не узкая, настройка в резонанс неточная и погрешности измерения  $\epsilon_e$  достаточно большие, а измерение  $\tan \delta$  потерь для необыкновенных волн дает завышенный результат. При смещении одного из зеркал в поперечном направлении на  $d \tan \alpha$  нагруженная добротность  $Q_i$  на необыкновенных волнах достигает максимального значения, резонансная кривая становится узкой и позволяет произвести точную настройку резонатора в резонанс и, тем самым, более точное измерение подстройки  $\Delta L$ . Тем самым достигается более точное измерение  $\epsilon_e$  и потерь в диэлектрике  $\tan \delta$  на необыкновенных волнах.

## Выводы

1. Если сместить одно из зеркал в главном сечении кристалла в поперечном к оси резонатора направлении на расстояние  $d \operatorname{tg} \alpha$ , то все результаты полученные для резонатора с изотропной пластиной диэлектрика, становятся справедливыми и для открытого резонатора с анизотропной пластиной, возбужденного на необыкновенных волнах, с единственной заменой в формулах  $n \rightarrow n_e$ , т.е. показатель преломления изотропного диэлектрика надо заменить на показатель преломления для необыкновенных волн.
2. В резонаторе, у которого одно из зеркал смещено в поперечном направлении на  $d \operatorname{tg} \alpha$  достигается более точное измерение  $\varepsilon_e$  и  $\operatorname{tg} \delta$  на необыкновенных волнах, чем у резонатора, где такое смещение не производилось.
3. В резонаторе, одно из зеркал которого является плоским, такое смещение зеркал производить не требуется. Поэтому такая конфигурация резонатора является оптимальной, поскольку без всякого изменения геометрии резонатора позволяет определить относительную диэлектрическую проницаемость, как на обыкновенных, так и на необыкновенных волнах.

### 3.3 Открытый резонатор со слоем квадратично неоднородного диэлектрика

Квадратичные среды широко используются для теоретического моделирования реальных неоднородных сред (неоднородности накачки, термические искажения в активной среде лазера, в оптических волокнах). С целью учета неоднородности активной среды при изучении собственных типов колебаний резонаторов ОКГ обычно используется модель нагруженного резонатора Фабри-Перо, заполненного однородной средой и содержащей простой преобразователь типа оптической линзы с комплексным фокусным расстоянием, например [30]. Анализ такой модели резонатора проводится на основе решения интегрального уравнения. Вопросы соответствия такой модели резонатору со сферическими зеркалами со слоем неоднородного диэлектрика остаются при этом не выясненными. Ниже исследованы свойства резонатора со сферическими зеркалами и слоем квадратично-неоднородного диэлектрика, не прибегая к подобной модели. При этом оказывается не требуется использовать аппарат интегральных уравнений.

Рассмотрим открытый резонатор (ОР) со слоем квадратично-неоднородного диэлектрика, диэлектрическая проницаемость которого задана в виде

$$\varepsilon_2(x) = \varepsilon_2 - \varepsilon_x \cdot x^2 \quad (1)$$

Геометрия резонатора показана на рисунке 17.

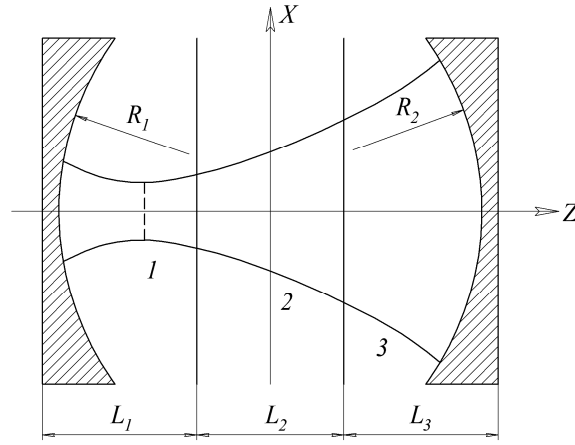


Рисунок 17

Ось неоднородности диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_2(x)$  совпадает с осью резонатора  $z$ ,  $R_1$  и  $R_3$  - радиусы зеркал,  $j = 1, 2, 3$  - номера областей, на которые разбит резонатор,  $n_1$  и  $n_3$  - показатели преломления в областях 1 и 3,  $L_1, L_2, L_3$  - размеры областей вдоль оси резонатора. Начало координат  $z=0$  находится в горловине.

Положение горловины резонансного колебания заранее неизвестно и подлежат определению номер области  $j$ , где она находится, и расстояние  $s_j$ , определяющее положение горловины в резонаторе. Если горловина расположена в областях 1, 3, то  $s_j$  будем отсчитывать от поверхности квадратичного слоя в сторону зеркала, если горловина в области 2, то  $s_2$  будем отсчитывать от середины квадратичного слоя вдоль оси  $z$  (см. рис. 15). Для определения положения горловины, предполагая последовательно, что горловина находится в одной из трех областей и приравнивая радиусы кривизны волновых поверхностей резонансного пучка радиусам зеркал, получаем систему двух уравнений

$$R_i = b_i^{(j)} \left[ 1 + \left( a_i^{(j)} / b_i^{(j)} \right)^2 \right], \quad (i = 1, 3) \quad (2)$$

где верхний индекс  $(j)$  указывает номер области, где находится горловина. При этом

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= n_1 a_o^{(1)}, \\ a_3^{(1)} &= n_3 a_o^{(1)} D^{(1)}(L_2), \\ a_1^{(2)} &= n_1 a_o^{(2)} D^{(2)}(L_1), \\ a_3^{(2)} &= n_3 a_o^{(2)} D^{(2)}(L_3), \\ a_1^{(3)} &= n_1 a_o^{(3)} D^{(3)}(L_2), \\ a_3^{(3)} &= n_3 a_o^{(3)}, \\ b_1^{(1)} &= L_1 - s_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3^{(1)} &= a_3^{(1)} \beta_2^{(1)}(L_2) + L_3, \\
b_1^{(2)} &= a_1^{(2)} \beta_2^{(2)}(N_1) + L_1, \\
b_3^{(2)} &= a_3^{(2)} \beta_2^{(2)}(N_3) + L_3, \\
b_1^{(3)} &= a_1^{(3)} \beta_2^{(3)}(L_2) + L_1, \\
b_3^{(3)} &= L_3 - s_3,
\end{aligned}$$

$$\beta_2^{(j)}(z) = \frac{1}{2} \mu_-^{(j)} - \mu_j^2 \sin(2\alpha z) + \beta_j \cos(2\alpha z),$$

$$D^{(j)}(z) = (1 + \beta_j^2) \left\{ \cos^2(\alpha z) + [\mu_j^2 \sin(\alpha z) - \beta_j \cos(\alpha z)]^2 \right\}^{-1},$$

$$\mu_j = \xi_j (1 + \beta_j^2)^{1/2},$$

$$\mu_{\pm}^{(j)} = \mu_j^{-4} (1 + \beta_j^2) \pm 1,$$

$$\beta_j = s_j / n_j a_o^{(j)}, (j = 1, 3), \beta_2 = 0,$$

$$N_1 = L_2/2 + s_2,$$

$$N_3 = L_2/2 - s_2$$

Параметр  $\xi_j$  определяется формулой

$$\xi_j = (a_o^j / a_c)^{1/2} = \rho_o^{(j)} / \rho_c, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
a_o &= k \rho_o^2 / 2, \quad a_c = (\epsilon_x)^{-1/2} = k \rho_c^2 / 2 \\
k &= 2\pi / \lambda,
\end{aligned} \quad (4)$$

$\lambda$  - длина волны в вакууме,  $\rho_o$  - радиус резонансного пучка в горловине,  $\rho_c$  - радиус собственной моды квадратичной среды. Таким образом, параметр  $\xi_j$  определяет соотношение между масштабом изменением поля  $\rho_o$  и масштабом изменения неоднородности  $\rho_c$ .

Величина  $\alpha$  определяется формулой

$$\alpha = (n_2 a_c)^{-1},$$

где

$$n_2 = \left( \epsilon_2 - \frac{2p+1}{ka_c} \right)^{1/2} \quad (5)$$

эффективный показатель преломления квадратичной среды для  $p$ -го типа колебания ( $p$  - номер полинома Эрмита).

Система двух уравнений (2) в отличие от аналогичной для резонатора с однородным слоем не позволяет определить  $a_o^{(j)}$  и  $s_j$ , так как  $n_2$  зависит от волнового числа  $k$ , которое неизвестно. Поэтому систему (2) надо дополнить

дисперсионным уравнением резонатора, которое без учета отражений от квадратичного слоя имеет вид

$$kL = q\pi + \left(p + \frac{1}{2}\right) \left(u_3^{(j)} + u_1^{(j)}\right), \quad (6)$$

где  $q$  - натуральное число,

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2 + n_3 L_3$$

оптическая длина резонатора, а  $u_i^{(j)}$  определяется формулой

$$u_i^{(j)} = \arctg b_i^{(j)} / a_i^{(j)}$$

Формула (6) определяет резонансную частоту ОР без учета отражений от слоя внутри резонатора. Учет отражений, проведенный выше для ОР с однородной пластиной диэлектрика, приводит к небольшим осцилляциям резонансной частоты при изменении положения пластины в резонаторе, которыми для практических целей можно пренебречь. Кроме того, учет отражений резко усложняет вид дисперсионного уравнения.

Система уравнений (2), (6) позволяет определить неизвестные  $a_o^{(j)}$  и  $s_j$ , а также номер области  $j$ , где находится горловина. Для этого последовательно для всех  $j = 1, 2, 3$  из (2), (6) определяются  $s_j$ . Номер области, где расположена горловина резонансного колебания, находится из условий

1. если  $s_1 \geq 0$ , то  $j = 1$
2. если  $|s_2| < L_2/2$ , то  $j = 2$
3. если  $s_3 \geq 0$ , то  $j = 3$

По сравнению с резонатором с однородной пластиной диэлектрика, в данном случае имеются существенные отличия. Для ОР с однородным слоем возможно выполнение только одного условия в (7), т. е. номер области, где находится горловина, определяется однозначно. В данном случае возможно выполнение нескольких условий одновременно. Это говорит о том, что в ОР с квадратичным слоем в каждой из областей, для которых выполняется (7), имеется горловина. Какой из номеров областей ( $j$ ) взять при этом для подстановки в (2), (6) не играет никакой роли.

Исследуем более подробно симметричный резонатор для которого  $R_1 = R_3 = R$ .  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $L_1 = L_3$ . Систему уравнений (2), (6) при этом можно записать в виде

$$x = bD(R/b - 1)^{1/2}, \quad (8)$$

$$y = [q\pi + (2p + 1)u] / L, \quad (9)$$

где  $x = a_o$ ,  $y = k$ ,  $a = x/D(L_2/2)$ ,  $b = a\beta(L_2/2) + L_1$

$$\beta(z) = \frac{1}{2} (\xi^{-2} - \xi^2) \sin(2\alpha z)$$

$$D(z) = \cos^2(\alpha z) + \xi^4 \sin^2(\alpha z)$$

$$L = 2L_1 + n_2 L_2, \quad u = \arctg b/a.$$

Из соображений симметрии при этом  $s_2 = 0$ .

Система двух нелинейных уравнений (8), (9) приведена к виду, удобному для численного решения методом итераций. Независимым параметром в системе является величина  $a_c$ , которая может быть задана произвольно. При больших  $a_c$  хорошим начальным приближением являются значения  $x_o$  и  $y_o$  для резонатора с однородным слоем с диэлектрической проницаемостью

$$n_2 = n_{2o} = \varepsilon_2^{1/2}$$

$$x_o = \{[R - (L_1 + L_2/2n_{2o})(L_1 + L_2/2n_{2o})]\}^{1/2} \quad (10)$$

$$y_o = L_o^{-1}[q\pi + (2p + 1)u_o], \quad (11)$$

где  $L_o = 2L_1 + n_{2o}L_2$ ,  $u_o = \arctan x_o^{-1}(L_1 + L_2/2n_{2o})$ .

Зависимости  $\rho_o$  и  $\rho_c$  от параметра  $a_c$  представлены на рисунке 18.

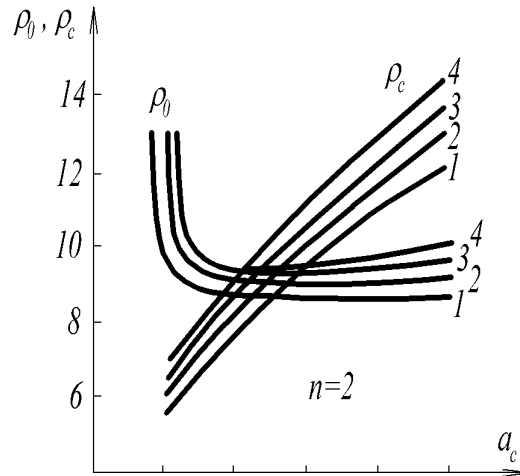


Рисунок 18а

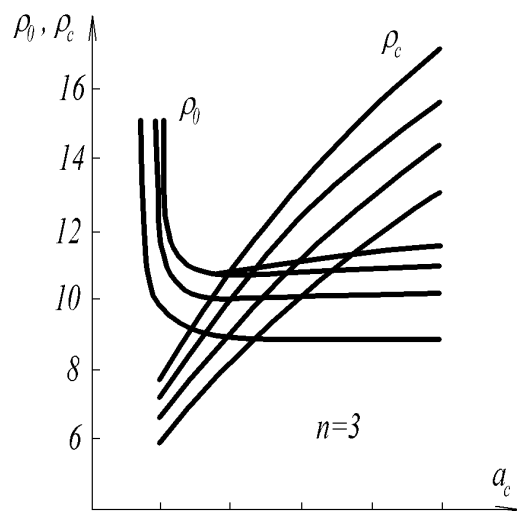


Рисунок 18б

В точках пересечения кривых для  $\rho_o$  и  $\rho_c$  параметр  $\xi = 1$  и осцилляции радиуса пучка внутри слоя квадратичного диэлектрика отсутствуют. При

дальнейшем уменьшении  $a_c$  (и соответственно  $\rho_c$ ) величина  $\rho_o$  резко возрастает и при некотором значении  $\rho_c$  итерационный процесс начинает расходиться, что физически соответствует срыву колебаний. Граница устойчивости колебаний по параметру  $\rho_c$  в зависимости от толщины квадратичного слоя приведена на рисунке 19.

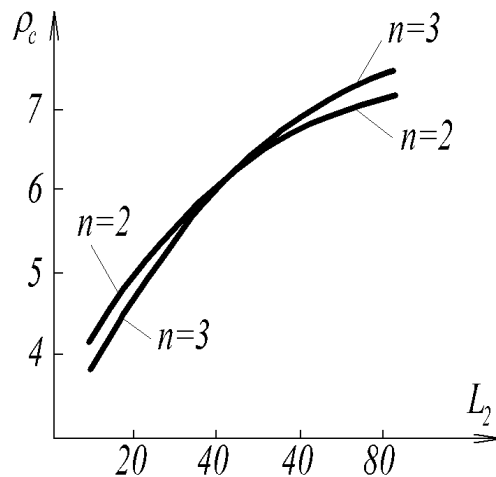


Рисунок 19

Период осцилляций  $\lambda$  радиуса резонансного пучка внутри квадратичного слоя определяется формулой

$$\lambda = \pi n_2 a_c$$

и при срыве колебаний выполняется неравенство  $L_2 \ll \lambda$ , т. е. осцилляции радиуса пучка при всех возможных  $a_c$  в резонаторе не возникают. Происходит плавное изменение радиуса пучка внутри квадратичного слоя вплоть до срыва колебаний.

Таким образом свойства неоднородности диэлектрической проницаемости начинают существенно сказываться при радиусе собственной моды  $\rho_c$  меньшей радиуса пучка  $\rho_o$  в центре резонатора, т. е. при  $\xi \ll 1$ . При  $\rho_c \gg \rho_o$  (т. е.  $\xi \gg 1$ )  $\rho_o$  имеет значения очень мало отличающиеся от значений для резонатора с однородным слоем с  $n_2 = \epsilon_2^{1/2}$ .

Радиус пучка внутри квадратичного слоя  $\rho_2(z)$  определяется формулой

$$\rho_2(z) = \rho_o [1 + \beta^2(z)]^{1/2} D^{-1/2}(z),$$

а вне слоя формулой

$$\rho_1(z_2) = \rho_o \left\{ 1 + [\beta(L_2/2) + z_2/a]^2 \right\}^{1/2} D^{-1/2}(L_2/2),$$

где  $z_2 = z - L_2/2$ .

Профили волн (зависимости  $\rho$  от продольной координаты  $z$ ) представлены на рисунке 20.

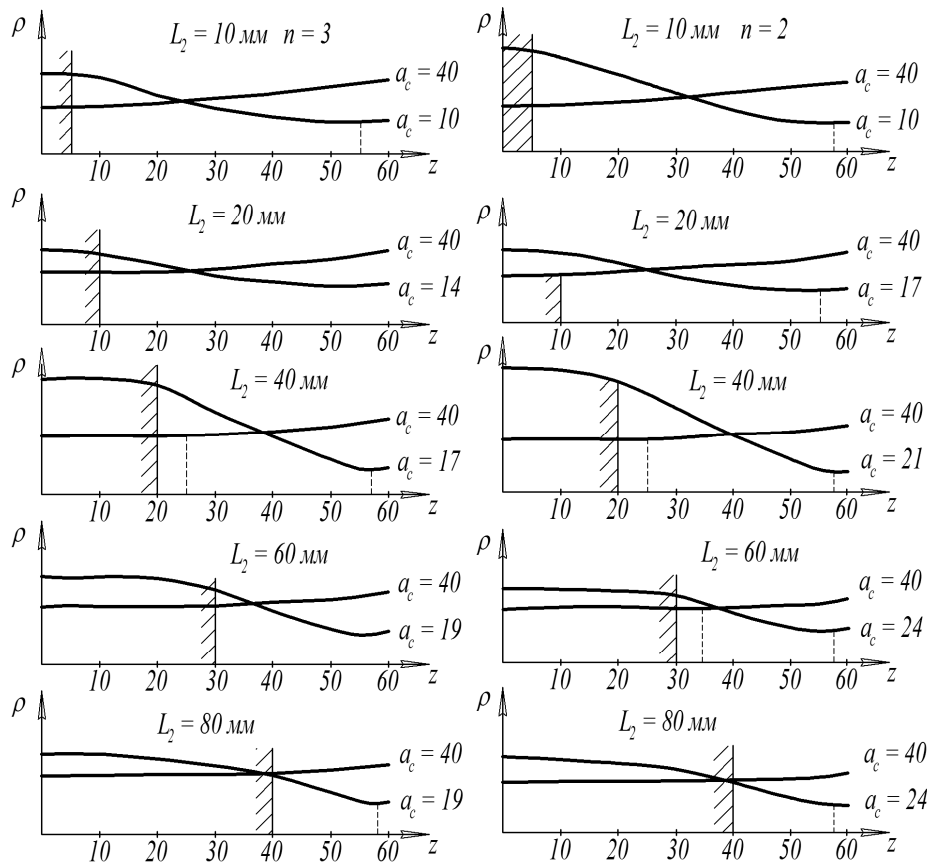


Рисунок 20

На рисунке 20 они представлены для различных толщин квадратичного слоя  $L_2$  при двух значениях параметра  $a_c$ : при большом  $a_c$ , когда неоднородный диэлектрик ведет себя в ОР практически как однородный, и при  $a_c$  близких к значениям, при которых происходит срыв колебаний в резонаторе.

Динамика возникновения неустойчивости колебаний в ОР с квадратичным слоем в корне отлична от неустойчивости колебаний незаполненного резонатора или резонатора с однородным слоем. Формула (6) позволяет не только определить резонансные частоты ОР с квадратичным слоем, но и получить условие устойчивости колебаний, которое имеет вид

$$0 \leq \left\{ \left[ (1 - b_1/R_1)(1 - b_3/R_3) \right]^{1/2} - \left[ (b_1/R_1)(b_3/R_3) \right]^{1/2} \right\}^2 \leq 1 \quad (12)$$

Для незаполненного резонатора  $b_1$  и  $b_3$  имеют смысл расстояний от горловины колебания до соответствующих зеркал и (12) принимает хорошо известный вид

$$0 \leq q_1 q_3 \leq 1, \quad (13)$$

где  $q_i = 1 - L_o/R_i$ , ( $i = 1, 3$ ),  $L_o$  - геометрическая длина резонатора.

Для резонатора с однородным слоем (при  $a_c \rightarrow \infty$ ) (12) принимает вид, приведенный в разделе 3.1

$$0 \leq \tilde{q}_1 \tilde{q}_3 \leq 1, \quad (14)$$

где

$$\tilde{q}_i = q_i + p_i(1 - q_i)$$



$$p_1 = (L_3/L_o)(1 - n_1/n_3) + (L_2/L_o)(1 - n_1/n_2)$$

$$p_3 = (L_1/L_o)(1 - n_3/n_1) + (L_2/L_o)(1 - n_3/n_2)$$

В симметричных незаполненном ОР и ОР с однородным слоем горловина всегда в центре резонатора и неустойчивость колебаний связана с тем, что при некоторых геометрических параметрах аргумент тригонометрических функций в дисперсионном уравнении выходит за пределы его определения. В этом случае говорят, что колебание становится неустойчивым и оно не может существовать. Лучевой пакет такого колебания при проходах не повторяется и расходится.

Такой вид неустойчивости возможен в ОР с квадратичным слоем. Для симметричного резонатора условие (12) приобретает вид

$$(1 - 2b/R)^2 \leq 1$$

или

$$0 \leq b/R \leq 1 \quad (15)$$

и при  $b/R$ , не удовлетворяющем (15), колебание становится неустойчивым. Однако характер неустойчивости по параметру  $a_c$  (или  $\rho_c$ ), при которой при больших  $a_c$  колебание устойчиво, а при уменьшении достигает предела, при котором возникает расходимость итерационного процесса в решении системы (8) (9) (и соответственно, срыв колебаний), совсем другой. Вычисления показывают, что даже при расходимости итерационного процесса величина  $b/R$  стабилизируется и удовлетворяет условию (15), т. е. причина срыва колебаний другая. Анализ профилей резонансных пучков, представленных на рис. 18 позволяет выяснить причину возникающей неустойчивости.

При больших  $a_c$  в силу большого периода осцилляций  $\lambda$  радиус пучка в слое диэлектрика практически постоянен и медленно увеличивается в свободном пространстве. С уменьшением  $a_c$  при неизменной геометрии резонатора неоднородность диэлектрической проницаемости приводит к увеличению радиуса пучка в центре резонатора и при  $\rho_c < \rho_o$  (т. е.  $\xi < 1$ ) в свободных пространствах 1 и 3 образуются горловины, их положение на рисунке 18 отмечено пунктирными линиями. При дальнейшем уменьшении  $\rho_c$  увеличивается  $\rho_o$ , а горловина смещается в сторону зеркал и при некотором значении  $\rho_c$  горловины настолько близки к зеркалам, что выполнение равенства (2) становится невозможным и колебание теряет устойчивость. То есть квадратичный слой ведет себя наподобие собирающей линзы, оптическая сила которой уменьшается при уменьшении  $\rho_c$ .

На резонансную длину волны изменение масштаба неоднородности  $\rho_c$  практически не оказывает влияния во всем диапазоне  $\rho_c$  вплоть до срыва колебаний.

## Выводы

1. Резонансные частоты для ОР с квадратичным слоем с практической точностью определяются по формулам для ОР с однородным слоем с показателем преломления  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ .
2. В области  $\rho_c < \rho_o$  происходит срыв колебаний специфический именно для резонатора с квадратичным слоем.

### 3.4 Прохождения волнового пучка сквозь линзу

Рассмотрим наклонное, то есть не совпадающее с главной оптической осью, падение волнового пучка на линзу, которое вызвано неточностью его ввода относительно оптической оси системы. При этом вследствие децентровки (смещения оси пучка относительно оптической оси линзы) и наклона оси пучка происходит деформация преломленного пучка. Нас будет интересовать случай, когда наклон оси падающего пучка относительно небольшой. Аналогичная задача рассмотрена в [32] методом геометрической оптики. В данной работе эта задача рассмотрена на основе волновых представлений методом, который можно назвать методом вариантов. При этом получены более простые и более общие окончательные результаты по сравнению с методом геометрической оптики. Будем рассматривать двухмерный случай. Падающий волновой пучок распространяется вдоль оси  $z$ , начало которой лежит в центре перетяжки (горловине) пучка, преломленный пучок - вдоль оси  $z'$ , начало которой лежит в точке пересечения оси преломленного пучка и выходной поверхности линзы. Ось падающего волнового пучка составляет с главной оптической осью линзы угол  $\varphi$ , ось преломленного пучка – угол  $\varphi'$ . Поле падающего волнового пучка определяется формулой

$$u_1 = \sqrt[4]{\frac{A_p}{A_1}} H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_1}} x \right) \exp \left( -\frac{kx^2}{2V_1(z)} + ikz - i \left( m + \frac{1}{2} \right) u_1 \right) \quad (1)$$

а поле преломленного пучка формуле

$$u_2 = \sqrt[4]{\frac{A'_p}{A_2}} H_m \left( \sqrt{\frac{k}{A_2}} x' \right) \exp \left( -\frac{k(x')^2}{2V_2(z')} + ikz' - i \left( m + \frac{1}{2} \right) u_2 \right) \quad (2)$$

где -  $H_m(x)$  - полиномы Эрмита-го  $m$ -го порядка,  $V_1(z)$  и  $V_2(z)$  - варианты падающего и преломленного волновых пучков. Варианс - это комплексный параметр, изменяющийся при распространении пучка в пространстве и полностью определяющий геометрические параметры волнового пучка. Преимуществом записи в комплексном виде является компактность формул.

Если обозначить  $V_1^+$  и  $V_1^-$  - значение вариантов на входной поверхности линзы,  $V_2^+$  и  $V_2^-$  - значение вариантов на выходной поверхности линзы ( знак

минус - для стороны падения, знак плюс - для второй стороны ), то варианты падающего  $V_1(z)$  и преломленного  $V_2(z')$  пучков определяются формулами

$$V_1(z) = A_p + iz, \quad V_2(z') = \text{Re} V_2^+ + i(\text{Im} V_2^+ + z') \quad (3)$$

Действительная часть варианта определяет размер  $A_p$  в перетяжке (горловине) пучка и расходимость  $\theta$  пучка по формулам

$$A_p = \text{Re} V_1, \quad A'_p = \text{Re} V_2^+, \quad \theta = \sqrt{\frac{2}{kA_p}}, \quad \theta' = \sqrt{\frac{2}{kA'_p}}, \quad (4)$$

где штрих относится к преломленному линзой пучку. Значение координаты, при которой мнимая часть варианта преломленного линзой пучка обращается в ноль, определяет координату перетяжки преломленного пучка. Это происходит при

$$z'_p = -\text{Im} V_2^+ \quad (5)$$

Размер пучка в перетяжке  $A_p$ , ( его еще называют конфокальным параметром пучка ) связан с радиусом пятна поля пучка  $r_p$  в перетяжке соотношениями

$$r_p = \sqrt{\frac{2}{k} A_p}, \quad r'_p = \sqrt{\frac{2}{k} A'_p}, \quad (6)$$

Размер пучка и радиус кривизны волновой поверхности в любом сечении пучка определяется вариантом пучка по формуле

$$\frac{1}{V_j} = \frac{1}{A_j} - i \frac{1}{R_j}, \quad (j=1,2)$$

где индекс 1 соответствует падающему пучку, а индекс 2 - преломленному пучку.

Таким образом, комплексный параметр пучка вариант  $V(z)$  полностью определяет остальные параметры пучка и, если известен закон преобразования варианта при прохождении оптической системы, то тем самым определены и все параметры пучка, который прошел сквозь оптическую систему.

Преобразования варианта пучка слоем с показателем преломления  $n$ , ограниченного с обеих сторон сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $R_{c1}$  и  $R_{c2}$  описывается системой уравнений

$$\frac{1}{V_1^+} = \frac{1}{nt_1^2 V_1^-} + i \frac{nt_1 - 1}{nt_1 R_{c1} \cos \varphi_1}, \quad (7)$$

$$V_2^- = V_1^+ + il \quad (8)$$

$$\frac{1}{V_2^+} = \frac{n}{t_2^2 V_2^-} + i \frac{t_2 - n}{t_2 R_{c2} \cos \varphi'_2} \quad (9)$$

$$t_j = \frac{\cos \varphi'_j}{\cos \varphi_j} \quad ((j=1,2))$$

где -  $l$  геометрический путь, который проходит пучок в линзе,  $\varphi_j$ -угол падения на  $j$ -ю сферическую границу раздела,  $\varphi'_j$ - угол преломления этой границей

раздела. Радиусы сферических поверхностей линзы  $R_{cj}$  алгебраические величины. Для выпуклых поверхностей ( центр кривизны лежит справа от поверхности по ходу пучка )  $R_{cj} > 0$ , для вогнутых -  $R_{cj} < 0$ . Уравнение (7) описывает преобразования варианса на первой ( входной ) поверхности линзы, уравнение (8) - на пути внутри линзы, уравнение (9) - на второй ( выходной ) поверхности линзы. Для тонкой линзы ( $l=0$ ) система (7) - (9) преобразуется к виду

$$\frac{1}{V_2^+} = \frac{1}{t_1^2 t_2^2 V_1^-} + i \frac{1}{W'} \quad (10)$$

где

$$\frac{1}{W'} = \frac{1}{t_2} \left( \frac{nt_1 - l}{t_1 t_2 R_{c1} \cos \phi'_1} - \frac{n - t_2}{R_{c2} \cos \phi'_2} \right) \quad (11)$$

Для тонких линз углы  $\phi_j, \phi'_j, \phi'$  легко определяются по известному углу наклона оси падающего пучка  $\phi$  и смещению от оси ( децентровки )  $y_0$  по следующим формулам

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi - \beta_1, \quad \phi'_1 = \arcsin\left(\frac{\sin \phi_1}{n}\right) \\ \phi_2 &= \phi'_1 + \beta_1 - \beta_2, \quad \phi'_2 = \arcsin(n \sin \phi_2) \\ \phi' &= \phi'_2 + \beta_2, \quad \sin \beta_1 = \frac{y_0}{R_{c1}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{y_0}{R_{c2}} \end{aligned}$$

Здесь использовано правило знаков, которое принято в прикладной оптике. Положительными считаются направления: для поперечных размеров - вверх от главной оптической оси линзы, для продольных - слева направо, для углов – по часовой стрелке. Из уравнения (10) с учетом (3) находим параметры перетяжки волнового пучка, который прошел линзу

$$A'_p = \frac{A_2^+}{1 + \left( \frac{z_p}{A_p} - \frac{A_2^+}{W'} \right)}, \quad z'_p = \frac{A_2^+ \left( \frac{A_2^+}{W'} - \frac{z_p}{A_p} \right)}{1 + \left( \frac{z_p}{A_p} - \frac{A_2^+}{W'} \right)}, \quad (12)$$

где -  $A_2^+$  размер пучка на выходе из линзы, который определяется по формуле

$$A_2^+ = A_1^- t_1^2 t_2^2 = A_p \left( 1 + \frac{z_p^2}{A_p^2} \right) t_1^2 t_2^2 \quad (13)$$

В формулах (12)  $z_p$  - расстояние от перетяжки падающего пучка до линзы, которое измерено вдоль оси пучка ( $z_p > 0$ ). Из формул (12) получаем

$$\frac{z_p}{A_p} + \frac{z'_p}{A'_p} = \frac{A_2^+}{W'} \quad (14)$$

Формулу (14) можно рассматривать, как своеобразный аналог для волновых пучков формулы тонкой линзы, известной в геометрической оптике

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad (15)$$

где  $d$  - расстояние от предмета до линзы,  $f$  - расстояние от линзы до изображения,  $F$  - фокусное расстояние линзы. В отличие от (15) формула (14) является результатом волновой теории, которая учитывает дифракцию волнового пучка при распространении. И, если формула (15) устанавливает соотношение между расстояниями от линзы до предмета и его изображения, то формула (14) устанавливает соотношение между расстояниями от линзы до перетяжек падающего и преломленного пучков. Следует отметить, что формула (14) устанавливает именно соотношение, но не позволяет по известным параметрам  $z_p$  и  $A_p$  падающего пучка найти аналогичные параметры пучка на выходе из линзы, так как неизвестных два, а уравнений одно. Для этого нужно напрямую воспользоваться формулами (10) - (14). Наиболее простой вид формулы (10) - (14) приобретают при распространении пучка вдоль главной оптической оси линзы. При этом  $t_1 = t_2 = 1$

$$A_2^+ = A_1^- = A_p \left( 1 + \frac{z_p^2}{A_p^2} \right)$$

$$\frac{1}{W'} = (n-1) \left( \frac{1}{R_{c1}} - \frac{1}{R_{c2}} \right)$$

Одним из наиболее интересных параметров при прохождении пучка сквозь линзу является коэффициент  $\beta$  линейного увеличения перетяжек

$$\beta^2 = \frac{A_p'}{A_p} = \left( \frac{r_p'}{r_p} \right)^2 = \left( \frac{\theta}{\theta'} \right)^2$$

Выполняя замену переменных

$$z_p = -(b_p + W), \quad z_p' = b_p' + W'$$

где  $W = -W'$ , для коэффициента  $\beta$  получаем

$$\beta^2 = -\frac{b_p'}{b_p} = \frac{(W')^2}{A_p^2 + b_p^2} \quad (16)$$

При  $y_o = 0$  и  $\varphi = 0$  (падения пучка на линзу вдоль главной оптической оси) имеем

$$b_p = a_p, \quad b_p' = a_p', \quad W' = F', \quad W = F, \quad t_1 = t_2 = 1, \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 0,$$

где  $a_p$  - расстояние перетяжки падающего пучка от передней фокальной плоскости линзы вдоль оптической оси,  $a_p'$  - расстояние перетяжки преломленного пучка от заднего фокуса линзы,  $F'$  - фокусное расстояние линзы. Формула (16) при этом переходит в известную формулу [32,33]

$$\beta^2 = -\frac{a_p'}{a_p} = \frac{(F')^2}{A_p^2 + a_p^2} \quad (17)$$

а формула (14) в формулу

$$\frac{z_p}{A_p} + \frac{z'_p}{A'_p} = \frac{A_p^2 + z_p^2}{A_p F'} \quad (18)$$

Формула (18), справедливая при падении пучка вдоль главной оптической оси, позволяет решить и обратную задачу - по заданным параметрам падающего и преломленного пучков определить фокусное расстояние линзы  $F'$

$$\frac{1}{F'} = \frac{z_p}{A_p^2 + z_p^2} + \frac{z'_p}{A_p^2 + z_p^2} \frac{A_p}{A'_p} \quad (19)$$

В аналогичной ей формуле (14) для наклонного падения обратная задача не может быть решена. Развитый подход для наклонного падения позволяет решить только прямую задачу. Т.е. по известным параметрам падающего пучка и линзы определить параметры преломленного пучка.

Из приведенных результатов следует, что в случае децентровки или наклонного падения кругового в поперечном сечении пучка на линзу преломленный пучок будет эллиптическим, вследствие того, что в плоскости падения и в перпендикулярной к ней плоскости параметры пучка разные. Кроме того перетяжки преломленного пучка в плоскости падения и в перпендикулярной к ней плоскости расположены на разных расстояниях от линзы, в результате чего волновые поверхности пучка становятся астигматичными. Формулы (12) - (14) позволяют рассчитать возникающие при этом деформации пучка. Круговая форма поперечного сечения пучка и сферическая форма его волновой поверхности сохраняются в преломленном пучке только при осевом падении на линзу.

### 3.5 Прохождение гауссового волнового пучка через линзовую линию

При вводе гауссового волнового пучка (например, пучка лазерного излучения) в линзовую линию возможна разюстировка исходного пучка излучения относительно линзовой линии в результате чего ось гауссового волнового пучка не будет совпадать с осью линзовой линии. При этом возможны децентровка (смещение оси пучка относительно оси линии), поворот оси пучка относительно оси линии, а также оба эти эффекта одновременно. Несоосное введение пучка в линию приводит к сложному характеру распространения пучка в линии, в результате чего волновой пучок при значительных отклонениях на входе может не пройти линзовую линию. Нас будет интересовать вопрос – при каких максимальных смещениях и поворотах волновой пучок проходит линзовую линию с заданными параметрами. При соосном введении пучка в линию такая задача рассмотрена в [32] методом геометрической оптики. При несоосном введении пучка в линию метод геометрической оптики становится неправомерным. В данной разделе эта задача рассмотрена на основе волновых представлений и при этом получены простые конечные выражения для параметров пучка на выходе из линзовой линии.

Будем рассматривать двухмерный случай. Линзовая линия состоит из  $N$  собирающих линз со сферическими поверхностями радиусов кривизны  $R_{1,m}$  и  $R_{2,m}$ , которые изготовлены из прозрачных веществ с показателями преломления  $n$ , расстояние между линзами  $L_m$  (переменный период линии), ось падающего пучка составляет угол  $\varphi_1$  с осью линии,  $y_1$  - смещение на первой линзе оси падающего пучка от центра линзы,  $l_0$  - расстояние от горловины входного волнового пучка до первой линзы, которое измеряется вдоль оси входного волнового пучка (см. рис. 21).

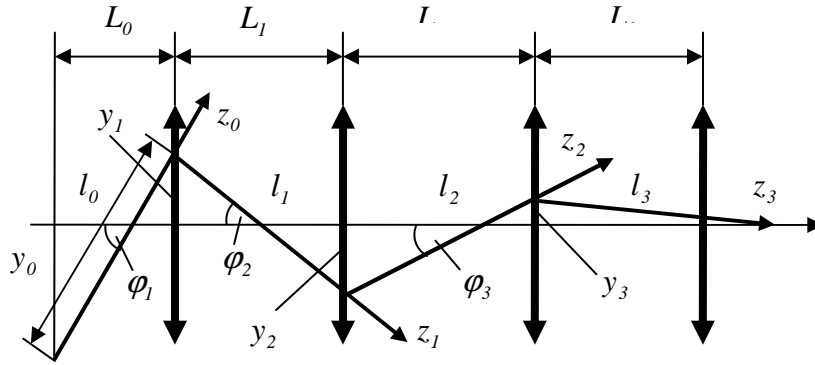


Рисунок 21

Поле пучка, который прошел сквозь линзу, если его пятно не выходит за пределы линзы, т.е. при малых смещениях и поворотах, также есть гауссовым волновым пучком. Поэтому поле пучка, который прошел  $m$ - ту линзу линии определяется формулой

$$u_m = 4 \sqrt{\frac{A_{0m}}{A_m}} H_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_m}} x_m \right) \exp \left( -\frac{kx_m^2}{2V_m(z_m)} + ikz_m - i \left( p + \frac{1}{2} \right) \phi_m(z_m) \right) \quad (1)$$

где  $H_p(x)$  - полином Эрмита  $p$ -го порядка,  $k = \frac{\omega}{c}$  - волновое число,  $(x_m, z_m)$  - системы координат, которая связана с  $m$ -м волновым пучком так, что ось  $z_m$  направлена вдоль оси пучка, который падает на  $m+1$ -ю линзу, а начало отсчета лежит на  $m$ -ой линзе (для пучка, который вводится в линию, начало отсчета лежит в горловине пучка),  $V_m(z_m)$  - параметр волнового пучка, который называется вариансом. Этот параметр определяет все геометрические параметры волнового пучка по формуле

$$V_m^{-1} = A_m^{-1} - iR_m^{-1} \quad (2)$$

где  $R_m$  - радиус кривизны волновой поверхности пучка, а величина  $A_m$  определяет радиус пятна поля  $w_m$  по формуле

$$A_m = \frac{k w_m^2}{2}$$

Величины  $A_m$  и  $R_m$  определяются формулами

$$A_m = A_{0,m} \left( 1 + \frac{(z_m + z_{0,m})^2}{A_{0,m}^2} \right),$$

$$R_m = (z_m + z_{0,m}) \left( 1 + \frac{A_{0,m}^2}{(z_m + z_{0,m})^2} \right)$$

При этом  $A_{0,m} = \frac{kw_{0,m}^2}{2}$ , где  $w_{0,m}$  - радиус пятна поля в горловине пучка.

Варианс пучка определяется формулой

$$V_m(z_m) = V_m^+ + iz_m \quad (3)$$

где  $V_m^+$  - значение варианта на выходе  $m$ -ой линзы. Из формул (2) и (3) вытекает, что

$$A_{0,m} = \operatorname{Re} V_m^+$$

а значение координаты  $z_m = -z_{0,m}$ , определяет координату горловины  $m$ -го преломленного пучка, и равняется мнимой части варианта (3) преломленного  $m$ -ой линзой пучка,

$$z_{0,m} = \operatorname{Im} V_m^+ \quad (4)$$

Тонкая линза преобразует вариант  $V_m^-$  во входе в  $m$ -ю линзу в вариант  $V_m^+$  на выходе по формул

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_m^+} &= \frac{1}{t_{1,m}^2 t_{2,m}^2 V_m^-} + i \frac{1}{W_m} \\ \frac{1}{W_m} &= \frac{1}{t_{2,m}} \left( \frac{nt_{1,m} - 1}{t_{1,m} t_{2,m} R_1 \cos \phi'_{1,m}} - \frac{n - t_{2,m}}{R_2 \cos \phi'_{2,m}} \right) \\ t_{j,m} &= \frac{\cos \phi'_{j,m}}{\cos \phi_{j,m}} \end{aligned} \quad (5)$$

$\phi_{j,m}$  - угол падения на сферическую поверхность  $m$ -ой линзы,  $\phi'_{j,m}$  - угол преломления ( $j=1$  - входная поверхность линзы,  $j=2$  - выходная). Радиус сферической поверхности линзы  $R_j$  алгебраическая величина. Для выпуклых поверхностей  $R_j > 0$ , для вогнутых поверхностей  $R_j < 0$ .

Для тонкой линзы углы  $\phi_{j,m}$  и  $\phi'_{j,m}$ , угол отклонения оси преломленного пучка  $\phi_{m+1}$  легко определить по известному углу наклона  $\phi_m$  оси падающего пучка на  $m$ -тую линзу и его смещением  $y_m$  на линзе по формулам

$$\begin{aligned} \phi_{1,m} &= \phi_m - \beta_{1,m}, & \phi'_{1,m} &= \arcsin \left( \frac{\sin \phi_{1,m}}{n} \right) \\ \phi_{2,m} &= \phi'_{1,m} + \beta_{1,m} - \beta_{2,m}, & \phi'_{2,m} &= \arcsin (n \sin \phi_{2,m}) \\ \phi_{m=1} &= \phi'_{2,m} + \beta_{2,m} \end{aligned}$$



$$\beta_{j,m} = \arcsin\left(\frac{y_m}{R_j}\right), \quad (j = 1, 2)$$

$$y_m = y_{m-1} - L \operatorname{tg} \varphi_m, \quad (m \geq 1),$$

$$y_1 = y_0 - L_0 \operatorname{tg} \varphi_0$$

где  $y_0$  - смещение центра пятна поля в горловине вводимого пучка от оси линии,  $L_0$  - расстояние центра горловины входного пучка от первой линзы вдоль оси линии. Углы  $\varphi$  считаются положительными, если они отсчитываются по часовой стрелке.

Формула (3) позволяет определить вариант волнового пучка на входе  $m$ -ой линзы по его значению на выходе  $m-1$  линзы

$$V_m^- = V_{m-1}^+ + i l_{m-1}, \quad (6)$$

где  $l_{m-1}$  - длина оси волнового пучка между этими линзами. Подставляя (5) в (6), получаем формулу связи вариантов волновых пучков на выходе двух соседних линз

$$\frac{1}{V_m^+} = \frac{1}{t_{1,m}^2 t_{2,m}^2 (V_{m-1}^+ + i l_{m-1})} + i \frac{1}{W_m} \quad (m = 1, \dots, n) \quad (7)$$

Решая систему уравнений (7) с начальными условиями

$$\operatorname{Re} V_0^+ = A_0, \quad z_{0,0} = \operatorname{Im} V_0^+ = 0,$$

определяем параметры

$$A_{0,m} = \operatorname{Re} V_m^+, \quad z_{0,m} = \operatorname{Im} V_m^+$$

волнового пучка на выходе  $m$ -ой линзы. Условием сохранения структуры волнового пучка при прохождении линзовой линии есть

$$\frac{w_m}{\cos \varphi_m} + y_m \leq r_m \quad (8)$$

т.е. пятно поля пучка не выходит за апертуру линзы. При нарушении условия (8) структура пучка искажается и нужно изменить параметры предыдущих линз, чтобы условие (8) было выполнено.

На рисунках 22, 23 приведены результаты расчетов параметров пучка в линзовой линии для периодической линзовой линии с одинаковыми линзами.

На рисунке 22 представлено прохождение пучка через линзовую линию для различных углов ввода. Расстояние  $D_1$  от горловины входного пучка до первой линзы 50 мм, расстояние  $D$  между линзами 100 мм, радиус линз 50 мм. На графиках представлено изменение радиуса пятна поля пучка в линии при прохождении линии. Там же ниже показана траектория пучка при прохождении линии для каждого угла ввода в линию. Как видно из приведенных графиков имеет место критическая зависимость от угла ввода пучка в линию. С увеличением угла ввода радиус пятна поля пучка по мере прохождения линзы растет. Для пучка с радиусом пятна поля в горловине 16 мм при угле ввода  $6^\circ$  пучок не проходит линию без искажений, уже на пятой линзе пятно поля пучка достигает края линзы и в дальнейшем имеет тенденцию к увеличению.

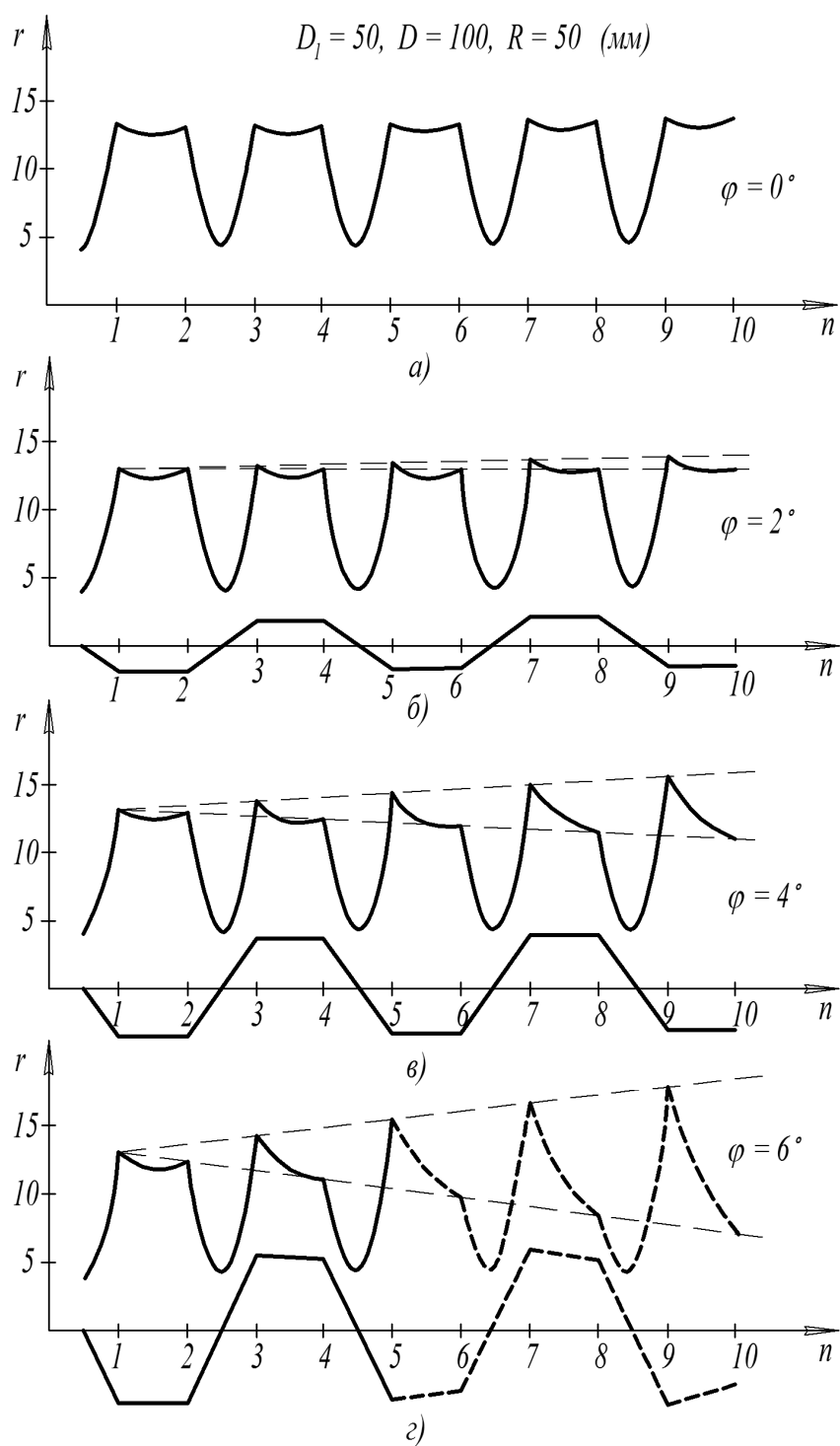


Рисунок 22

Аналогичная ситуация наблюдается и с увеличением смещения оси входного пучка относительно оси линзовой линии (см. рис. 23).

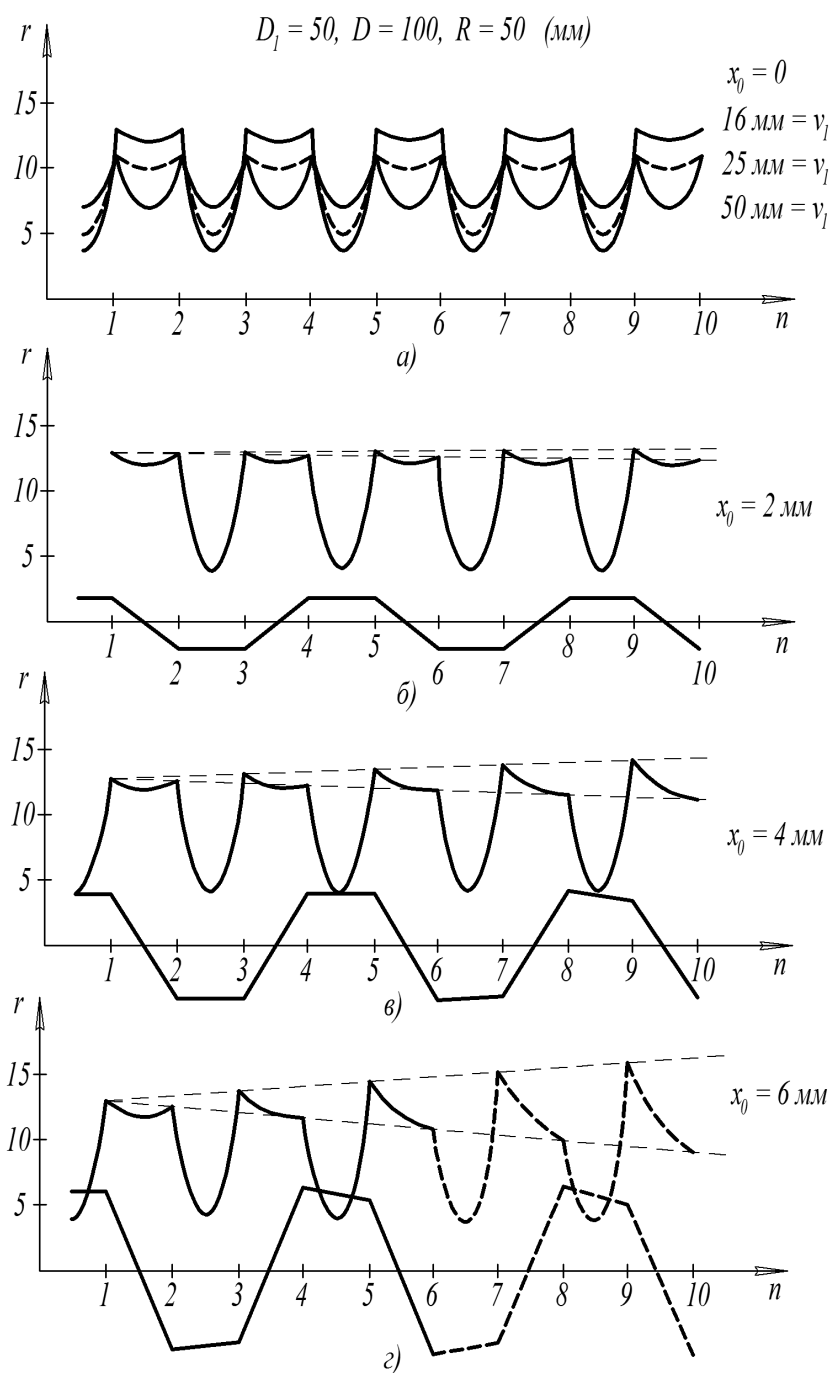


Рисунок 23

Уже на шестой линзе пучок с радиусом в горловине на входе 16 мм при смещении 6 мм достигает края линзы и дальнейшее его прохождение линии без искажений становится невозможным.

### 3.6 Потери на преобразование в генераторах дифракционного излучения

Отличительной особенностью генераторов дифракционного излучения от других генераторов сверхвысоких частот (СВЧ) есть то, что преобразование кинетической энергии электронного потока в СВЧ энергию колебания открытого резонатора происходит через дифракционное излучение

электронного потока, что собственно и отражено в самом названии таких генераторов.

Аппроксимируя поле дифракционного излучения электронного потока волновым пучком, для расчетов потерь на превращение энергии в генераторах дифракционного излучения мы приходим к задаче о связи между падающей волной и волнами квазиоптической системы в общей постановке, когда в плоскости сопряжения полей одновременно наблюдаются смещение падающего волнового пучка и излом на определенный угол относительно оси квазиоптической системы (рис.24). Именно к такой задаче приводит задача возбуждения дифракционным излучением электронного потока открытого резонатора генератора дифракционного излучения (рис.25).

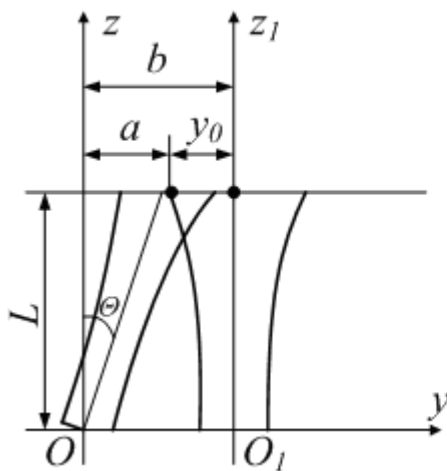


Рисунок 24

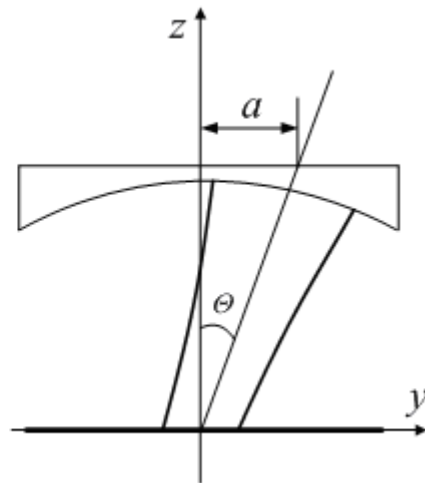


Рисунок 25

Направление дифракционного излучения определяется соотношением между скоростью электронного потока, длиной волны и периодом дифракционной решетки, которая нанесена на плоское зеркале открытого резонатора.

Для простоты будем рассматривать двухмерный случай. Поле открытого резонатора в плоскости сопряжения  $y = L$  определяется формулой

$$\Psi_n(y) = a_n H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} + i \frac{ky^2}{2R_1}\right) \quad (1)$$

где  $H_n(y)$  - полином Эрмита  $n$ -го порядка,  $w_1$  - радиус пятна поля резонатора,  $R_1$  - радиус кривизны резонансного колебания в плоскости сопряжения

$$w_1 = w_{01} \left(1 + \frac{L^2}{A_{01}^2}\right), \quad R_1 = L \left(1 + \frac{A_{01}^2}{L^2}\right), \quad A_{01} = \frac{kw_{01}^2}{2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$w_{01}$  - радиус пятна поля резонансного колебания на плоском зеркале. По заданным параметрам открытого резонатора - радиуса кривизны  $R_1$  зеркала и расстояния  $L$  между зеркалами находятся параметры  $A_{01}$ ,  $w_{01}$ ,  $w_1$

Координата  $y = a$  определяет центр пятна поля пучка дифракционного излучения в плоскости сопряжения, угол  $\theta$  - наклон оси пучка относительно

оси  $oz$ ,  $\mu = \sin^2 \theta$ . При небольших углах отклонения оси пучка дифракционного излучения от оси резонатора  $oz$ , когда  $\mu^2 \ll 1$ , поле волнового пучка дифракционного излучения в плоскости сопряжения  $z = L$ , т.е. в плоскости верхнего зеркала резонатора, определяется формулой

$$\Psi_m(y) = a_m H_m \left( \sqrt{2} \frac{y-a}{w} \right) \exp \left( -\frac{(y-a)^2}{w^2} + \frac{ik(y-a)^2}{2R} + ik\mu y \right) \quad (2)$$

где параметры  $w$  и  $R$  определяют радиус пятна поля и радиус кривизны волновой поверхности пучка дифракционного излучения в плоскости сопряжения

$$w = w_0 \left( 1 + \frac{L^2 + a^2}{A_0^2} \right) \quad R = \sqrt{L^2 + a^2} \left( 1 + \frac{A_0^2}{L^2 + a^2} \right)$$

$$A_0 = \frac{kw_0^2}{2}, \quad k = \frac{\omega}{c} \text{ - волновое число в вакууме.}$$

Функции (1) и (2) распределения полей нормированные таким образом, что переносимая каждой волной мощность равняется единице.

Для начала рассмотрим общий случай связи волн в виде гауссовых волновых пучков, когда пучок  $m$ -го порядка вводится в квазиоптическую систему с собственным пучком  $n$ -го порядка (см. рис.1). Плоскость  $z=L$  является плоскостью сопряжения. Это самый общий случай связи волн, когда в плоскости сопряжения имеются одновременно и смещение и излом. Коэффициенты связи  $C_{nm}$  между  $m$ -ым волновым пучком излучения и  $n$ -ым пучком квазиоптической системы определяются формулой

$$C_{nm} = \int_S \Psi_m(y) \Psi_n^*(y) dy \quad (3)$$

В формуле (3) нужно интегрировать по апертуре входа. Однако, учитывая то, что функции  $\Psi_n(y)$  быстро убывают, интегрирование в формуле (3) возможно распространить на бесконечные пределы.

В дальнейшем мы остановимся только на наиболее важном для практики случая основных видов пучков ( $n=0, m=0$ ), для которых коэффициент преобразования  $\eta$  по мощности, что определяет часть мощности, которая переходит из пучка излучения в резонансное колебание, определяется формулой

$$\eta = |C_{00}|^2 / \delta^2 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \quad (4)$$

где  $\delta$  - коэффициент связи между основными типами волновых пучков ( $n=0, m=0$ ) пучка излучения и пучка системы при отсутствии смещения ( $y_0=0$ ) и излома ( $\theta=0$ )

$$\delta = (2/qww_1)^{1/2} \quad (5)$$

$$q = \frac{1}{w^2} + \frac{1}{w_1^2} - ik \left( \frac{1}{2R} - \frac{1}{2R_1} \right)$$

$\eta_1$  - коэффициент преобразования только при наличии смещения

$$\eta_1 = \exp(-2 \frac{y_0^2}{B} (\frac{1}{w^2} (\frac{1}{A_I^2} + \frac{1}{R_I^2}) + \frac{1}{w_I^2} (\frac{1}{A^2} + \frac{1}{R^2}))) \quad (6)$$

$\eta_2$  - коэффициент преобразования только при наличии излома на угол  $\theta$

$$\eta_2 = \exp(-2 \frac{\mu^2}{B} (\frac{1}{w^2} + \frac{1}{w_I^2})) \quad (7)$$

$\eta_3$  – перекрестный коэффициент при одновременном наличии смещения и излома

$$\eta_3 = \exp(4 \frac{y_0 \mu}{B} (\frac{1}{w_I^2 R} + \frac{1}{w^2 R_I})) \quad (8)$$

$$B = (\frac{1}{A} + \frac{1}{A_I})^2 + (\frac{1}{R} - \frac{1}{R_I})$$

$$/\delta'^2 = \frac{2}{\sqrt{AA_I B}} \quad A = \frac{kw^2}{2}, \quad A_I = \frac{kw_I^2}{2}$$

Формулы (6), (7) совпадают с аналогичными работы [4]. Из формул (6) – (8) видно, что одновременное наличие смещения  $a$  и излома  $\theta$  увеличивает потери на преобразование сравнительно со случаем таких же смещений и изломов по отдельности. Это увеличение описывается перекрестным множителем  $\eta_3$ .

Формулу (4) возможно привести к виду

$$\eta = /\delta'^2 \exp(-2 \frac{D}{B} \gamma^2) \quad (9)$$

где 
$$D = \frac{1}{w^2} ((1 - g \frac{L}{R_I})^2 + g^2 \frac{L^2}{A_I^2}) + \frac{1}{w_I^2} ((1 - g \frac{L}{R})^2 + g^2 \frac{L^2}{A^2}),$$

$$g = 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}, \quad \gamma_0 = \frac{b}{L}, \quad \gamma = \frac{a}{L}.$$

Для генераторов дифракционного излучения (см. рис.22) со сфероидальным зеркалом с главными радиусами кривизны  $R_{Ix}$  - в плоскости  $xoz$  и  $R_{Iy}$  - в плоскости  $yoz$ , параметры  $b=0$ ,  $y_0=a$ ,  $\gamma_0=0$ . Коэффициент преобразования по мощности волнового пучка дифракционного излучения в поле собственного резонансного колебания при этом определяется формулой

$$\eta = \eta_x \eta_y \quad (10)$$

$$\eta_x = /\delta_x'^2, \quad \eta_y = /\delta_y'^2 \exp(-2 \frac{D}{B} \gamma^2)$$

Индексы  $x$  и  $y$  в формуле (10) указывает на то, что в формулах для  $\delta$ ,  $D$ ,  $B$  нужно взять параметры в соответствующей плоскости,  $\eta_x$  имеет смысл коэффициента преобразования в плоскости  $xoz$ , поперечной к электронному потоку,  $\eta_y$  - то же самое только в плоскости  $yoz$  (вдоль электронного потока).

Параметры волнового пучка дифракционного излучения в плоскости сопряжения определяются формулами

$$w^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{L^2 (1 + \mu^2)}{A_0^2}\right), \quad R = L \sqrt{1 - \mu^2} \left(1 + \frac{A_0^2}{L^2 (1 + \mu^2)}\right),$$

где  $A_0 = kw_0^2/2$ . Параметр  $w_0$  определяется по диаграмме направленности дифракционного излучения электронного потока

$$w_0 = \lambda / \pi \theta_e$$

где  $\theta_e$  - угловая ширина амплитудной диаграммы направленности на уровне  $1/e$ .

Результаты расчетов коэффициента преобразования, как функции параметра отклонения  $\mu$ , для генератора с одним электронным потоком представлены на рисунке 26.

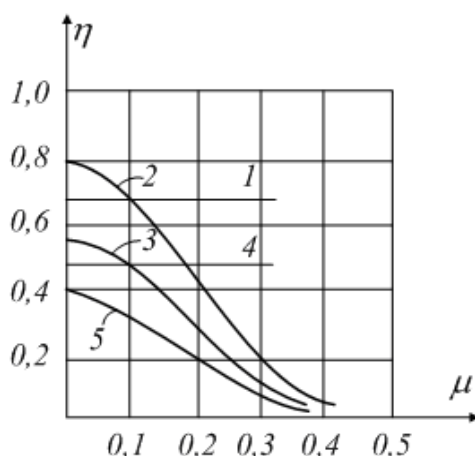


Рисунок 26

На рисунке 25 кривые соответствуют: 1- $\eta_x$  ( $A_x=7$ ), 2- $\eta_y$  ( $A_y=12$ ), 3- $\eta$  ( $A_x=7$ ,  $A_y=12$ ),

4- $\eta_x$  ( $A_x=3$ ), 5- $\eta$  ( $A_x=3$ ,  $A_y=12$ ).

Как видно из графиков рис.26 коэффициент преобразования быстро уменьшается с увеличением угла отклонения  $\theta$  пучка дифракционного излучения от оси резонатора. Половинное уменьшение достигается при  $\mu \approx 0,2$ .

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ардашев А.Ю. Классическая теория неидеальных когерентных световых пучков. / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скроцкий // ЖЭТФ. – 1988. – т.55. – Вып.3. – С. 869-875.
2. Бельский А.М. Отражение лазерного пучка от границы раздела изотропных диэлектриков. / А.М. Бельский, А.П. Хапалюк // Оптика и спектроскопия. – 1973. – Т.35, – Вып.1. – С. 117-119.
3. Бельский А.М. Преломление лазерного излучения на границе раздела изотропных диэлектриков / А.М. Бельский, А.П. Хапалюк // Оптика и спектроскопия. – 1975. – Т.38. – Вып.1. – С. 154-158.
4. Дешан Ж. Преобразование пучка при распространении в системе квадратичных линз / Ж. Дешан, П. Маст // Квазиоптика : научн. техн. сб. [под ред. Б.З. Каценеленбаума]. – М.: – 1966. – Мир. – С. 189-209.
5. М.Б. Виноградова. Теория волн : учебн. пос. / Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.; -М. : Наука, М., 1979 г., с 383.
6. Ваганов Р.Б. Диэлектрическая призма в лучевом волноводе. / Р.Б. Ваганов. // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 393–400.
7. Саад А. Рассеяние пучков на неоднородных структурах с вытекающими волнами / А. Саад, Г.А. Бертони, Т. Тамир // Труды инж. ин-та по электр. и радиоэлектр. – 1974. – Т. 62. – Вып. 11. – С. 163-174.
8. Шестопалов В.П. Дифракция волн на решетках : монография / В.П. Шестопалов; Харьк. гос. ун-т – Харьков : – ХГУ. – 1973. – С. 287.
9. Федоров Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. / Ф.И. Федоров, В.В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, – 1976. – С. 326.
10. Гончаренко А.М. Гауссовы пучки света. / А.М. Гончаренко – Минск: Наука и техника. – 1977. – С. 156.
11. Каплан А.Е. Теория явления гистерезисного отражения и преломления света на границе нелинейных сред. / А.Е. Каплан // ЖЭТФ. – 1977. – Т.72. – Вып.5. – С. 1710–1726.
12. Слепян Г.Я. Дифракция плоской волны на металлической гребенке с нелинейным магнитодиэлектрическим заполнением. / Г.Я. Слепян // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т.29. – Вып.4. – С. 629-636.
13. Шестопалов В.П.. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн ; монография / В.П. Шестопалов; Харьк. гос. ун-т. – Харьков: ХГУ. 1971. – С. 400.
14. Третьякова С.С. Дифракция волновых пучков на плоских периодических структурах. / С.С. Третьякова, О.А. Третьяков, В.П. Шестопалов // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т.17. – Вып.7. – С. 1366-1373.
15. Литвиненко Л.Н. Дифракция двумерного волнового пучка на ленточной решетке / Л.Н. Литвиненко, С.А. Просвирнин, И.И. Резник // Изв. вузов «Радиофизика», – 1979. – Т.22. – Вып.7. – С. 871-877.
16. Просвирнин С.А. Резник И.И. Дифракция двумерного волнового пучка на двойной ленточной решетке. / С.А. Просвирнин, И.И. Резник // Изв. вузов «Радиофизика», – 1980. – Т.23. – Вып.7. – С. 864-873.



17. Иванченко Д.Д., Колчигин Н.Н., Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.А., Резник И.И. Препринт ИРЭ АН УССР, – 1981. – №172.
18. Резник И.И. Дифракция двумерных гауссовых пучков на отражательной решетке из прямоугольных брусьев. / И.И. Резник // Изв. вузов «Радиофизика», 1982. – Т.25. – Вып.4. – С. 427-435.
19. В.П.Шестопалов. Дифракционная электроника; монография / В.П. Шестопалов; – Харьк. гос. ун-т. – Харьков: ХГУ, 1976. – с.278.
20. Сысоев А.С. Дифракционное излучение электронного потока конечных размеров. / А.С. Сысоев, О.А.Третьяков, В.П. Шестопалов. // Изв. вузов «Радиофизика», 1997. – Т.17. – Вып.7. – С.
21. Миллер М. Голография. / М. Миллер // Ленинград: – Машиностроение, 1979. – с.139.
22. Денисюк Ю.Н. Современное состояние и перспективы развития голографии. / Ю.Н. Денисюк // Ленинград: – Наука, 1974. – С. 285.
23. Островский Ю.И. Голография и ее применение. / Ю.И. Островский // Ленинград: – Наука, 1973. – С. 269.
24. Оптическая голография. / под ред. Г.Конфилда; М.: Мир, 1982. –с.374
25. Маркузе Д. Оптические волноводы. / Д. Маркузе // – М.: Мир, 1974.
26. Андросов В.П. Поляризационные и спектральные характеристики открытых резонаторов с внутренними неоднородностями. / В.П. Андросов, Э.И. Велиев, А.А. Вертий // Изв. вузов. Радиофизика. – 1983.– Т.26. – Вып. 3. – С. 318-328.
27. Вертий А.А. Исследование анизотропных пленок резонансным методом / А.А. Вертий, И.В. Иванченко, Н.А. Попенок и др.// Изв. Вузов Радиофизика. – 1983. – Т.26.– Вып.5. – С. 616-624.
28. Вертий А.А. Экспериментальное исследование открытого резонатора с анизотропным заполнением / А.А. Вертий, И.В.Иванченко, В.П. Шестопалов //Радиотехника и электроника. 1981, – Т. – 26, Вып. 2. – С. 294-298.
29. Андросов В.П. Фокусирующие особенности дифракционной решетки в открытом резонаторе / В.П. Андросов, Э.И. Велиев, А.А. Вертий //Изв. вузов. Радиофизика, 1985. – Т.30, – Вып. 5. – С. 634-646.
30. Селезнев Д.Т. Исследование собственных частот плоского резонатора нагруженного решеткой из металлических брусьев прямоугольного поперечного сечения / Д.Т. Селезнев // Вестн. Харьк. ун-та. Генерация, распространение и рассеивание электромагнитных волн. Харьков: ХГУ, 1981. – Вып. 10. – С. 40-43.
31. Сысоев А.С. Квазиоптический открытый резонатор с диэлектрическим слоем и решетками. / А.С. Сысоев //Украинский физический журнал, 1989. – Т. 34. – Вып. 10. – С.1487 – 1493.
32. Пахомов И.И. Расчет оптических систем лазерных приборов. / И.И. Пахомов, А.Б. Цыбуля // М.:, Радио и связь, 1986. – С.62 - 65.
33. Пахомов И.И., Алехневич В.И., Костин Д.И. Труды МВТУ, – М., МВТУ, 1981, – №368, – С. 69-76.
34. Пахомов И.И. Геометрические преобразования гауссового пучка / И.И. Пахомов // Изв. вузов «Приборостроение», 1981. – Т.24, – Вып 3. – С. 76-81.

*Наукове видання*

**СИСОЄВ** Анатолій Сергійович

# **ХВИЛЬОВІ ПУЧКИ У КВАЗІОПТИЧНИХ СИСТЕМАХ**

**МОНОГРАФІЯ**

(Рос. мовою)

*За авторською редакцією*

Відповідальний за випуск *А. С. Сисоєв*

Комп'ютерне верстання *І. М. Добробаба*

Дизайн обкладинки *Клочко Т.Є*

Підп. до друку 24.06.2015 р.  
Друк на ризографі  
Тираж 300 пр.

Формат 60х84/16  
Ум. друк. арк. 4,7  
Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014